FOR THE PEOPLE
FOR EDVCATION
FOR SCIENCE

LIBRARY
OF
THE AMERICAN MUSEUM
OF
NATURAL HISTORY

Bound at
A. M. N. H.
1924

Sitzungsberichte

5.06(43 36)M

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1920

München 1921
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

2H 44733 M248

Akademische Buchdruckerei F. Straub in München.

Inhaltsübersicht.

I. Sitzungsberichte.

	Seite
10. Jan.: Schlötzer, Stromer, Liebmann	1*
7. Febr.: Faber, Kneser, Stieve	3*
6. März: v. Seeliger, Pringsheim, Burmester, Hönigschmid und Birkenbach, Liebmann	4*
8. Mai: Sommerfeld, Liebmann, Voss, Föppl, Pringsheim, Polya, Balss	9*
5. Juni: Wieland und Weyland, Schmidt, Broili, Perron, Johnsen	12*
3. Juli: Zenneck, Stromer v. Reichenbach, Günther, Emden	15*
Verzeichnis der im Jahre 1920 eingelaufenen Druckschriften	21*

II. Abhandlungen.

F. Broili, Ein neuer Placodontier aus dem Rhaet der bayerischen Alpen	311
L. Burmester, Über den optischen Ausgleich in der Zeitlupe	183
R. Emden, Sonnenatmosphäre und Einsteineffekt	387
G. Faber, Über Potentialtheorie und konforme Abbildung	49
A. Föppl, Die Beanspruchung eines Stabes von elliptischem Querschnitt auf Drillen bei behinderter Querschnittswölbung	261
S. Günther, Optische Beweise für die Erdkrümmung sonst und jetzt	371
O. Hönigschmid und L. Birckenbach, Revision des Atomgewichtes des Wismuths. Analyse des Wismuthchlorids	83
A. Johnsen, Über die Paragenese von α-Quarz und Kohlensäure	321
A. Kneser, Die elementare Theorie der analytischen Funktionen und die komplexe Integration	65
H. Liebmann, Bedingte Flächenverbiegungen, insbesondere Gleitverbiegungen	21

Seite

H. Liebmann, Ausnahmefachwerke und ihre Determinante . 197

O. Perron: Über eine Verallgemeinerung des Stolzschen Irrationalitätssatzes II 291

G. Pólya: Geometrisches über die Verteilung der Nullstellen gewisser ganzer transzendenter Funktionen . . . 285

A. Pringsheim, Elementare Funktionentheorie und komplexe Integration 145

A. Pringsheim, Über eine Konvergenzbedingung für unendliche Reihen, die durch iterierte Mittelbildung reduzibel sind . 275

M. Schmidt, Neuberechnung des südlichen Netzteiles der bayerischen Landestriangulierung zwischen der Donau und der Nordkette der Alpen 1

M. Schmidt, Westwanderung von Hauptdreieckspunkten infolge neuzeitlicher tektonischer Bewegungen im bayerischen Alpenvorland 297

H. Seeliger, Untersuchungen über das Sternsystem . . . 87

E. Stromer, Bemerkungen über die ältesten bekannten Wirbeltier-Reste 9

E. Stromer, Mitteilungen über Wirbeltierreste aus dem Mittelpliocän des Natrontales (Ägypten) (mit 1 Tafel) . . . 345

A. Voss, Zur Theorie der reziproken Radien 229

H. Wieland: Über den Giftstoff der Kröte 329

Sitzungsberichte

der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften 1920.

Sitzung am 10. Januar.

1. Herr H. Liebmann legt vor:

Bedingte Flächenverbiegungen, insbesondere Gleitverbiegungen.

Unter Verwendung einer Reihe neuer Hilfsmittel, z. B. der rekurrierenden Bestimmung der analytischen Verbiegungen höherer Ordnung, werden besondere Klassen von Verbiegungen untersucht, vor allem die Gleitverbiegungen einer ebenrandigen Flächenkalotte, bei denen der Rand eben bleibt.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

2. Herr E. Stromer trug vor:

Bemerkungen über die ältesten bekannten Wirbeltier-Reste.

Angesichts sich sehr widersprechender und zum Teil sehr gewagter Hypothesen über die ältesten Wirbeltiere werden kurz die Tatsachen zusammengestellt, einige Angaben berichtigt und ergänzt und daraufhin mehrere Hypothesen kritisch erörtert. Darnach kennt man die ältesten Wirbeltier-Reste aus dem Unter- und Obersilur, sowie aus dem Devon Europas und Nordamerikas; die meisten der gefundenen Formen scheinen in Binnengewässern gelebt zu haben, waren Bodenbewohner und besaßen ein sehr starkes Hautskelett und ein kaum ver-

kalktes Innenskelett. Ihre Mannigfaltigkeit und andere Gründe sprechen dafür, daß uns noch sehr viele Zeitgenossen und Vorläufer unbekannt sind, vor allem Formen mit schwachem Hautskelett. Es ist wahrscheinlich, daß derartige Tiere die Vorläufer der stark gepanzerten waren und daß die ursprünglichen Wirbeltiere Bodenbewohner von Binnengewässern waren. Die Hypothesen, daß viele der gepanzerten Formen einen Saugmund hatten, daß die Fischflossen sich aus einer Art von Gehfüßen entwickelten, daß die meisten neben den Kiemen mit Lungen ausgestattet waren und daß alle von noch unbekannten Landwirbeltieren stammen, werden als unbewiesen und als unwahrscheinlich bezeichnet. (Erscheint in den Sitzungsberichten.)

3. Herr M. Schmidt legte vor eine umfangreiche geodätische Rechenarbeit des Assistenten am geodätischen Institut der Technischen Hochschule Dr. A. Schlötzer, die eine Neuberechnung des südlichen Teiles des bayerischen Hauptdreiecksnetzes zwischen der Donau und der Nordkette der Alpen zum Gegenstand hat. In derselben sind die wahrscheinlichsten sphärischen Koordinatenwerte von 40 Netzpunkten nebst ihren mittleren Fehlern nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet, um eine möglichst sichere Grundlage für die Feststellung von Lageänderungen dieser Punkte zu gewinnen, welche im Laufe des vergangenen Jahrhunderts vermutlich infolge von Erdkrustenbewegungen eingetreten sind.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

Sitzung am 7. Februar.

1. Herr A. Pringsheim legt folgende Abhandlungen vor:

a) Georg Faber:

Über Potentialtheorie und konforme Abbildung.

Der Verfasser geht dem bekannten Zusammenhang zwischen konformer Abbildung und logarithmischem Potential näher nach und bringt ihn in Beziehung zu dem Tschebyscheffschen Problem, das Polynom n^{ter} Ordnung $T_n(x) = x^n + \cdots$ zu finden, dessen Betrag in einem gegebenen, einfach zusammenhängenden, endlichen abgeschlossenen Bereich B einen möglichst kleinen Maximalwert annimmt; er zeigt, daß durch $\varrho = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{T_n(x)}$ der zu B komplementäre Bereich auf das Äußere eines Kreises $|z| = \varrho$ abgebildet wird. Daraus ergeben sich einerseits Sätze wie der, daß jener kleinste Maximalwert $> \left(\sqrt{\frac{J}{\pi}}\right)^n$ ist, wenn J den Inhalt des Bereiches B bedeutet, andrerseits eröffnet sich ein neuer und sehr leichter Zugang zu den in der letzten Zeit viel untersuchten sogenannten Verzerrungssätzen. Die behandelten Fragen stehen übrigens in Zusammenhang und gestatten u. a. auch mit der Hydrodynamik eine sehr einfache Ableitung der Blasiusschen Formeln und des Kutta-Joukowskyschen Satzes.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

b) Adolf Kneser (Breslau):

Die elementare Theorie der analytischen Funktionen und die komplexe Integration.

Die vorstehende Mitteilung verfolgt den Zweck, die großen Vorteile der komplexen Integration auch für die Weierstraßische Funktionentheorie nutzbar zu machen, ohne deren elementaren Charakter zu zerstören. Ausgehend von gewissen Grenzbetrachtungen, die, ähnlich wie die analogen Zwecken

dienenden Pringsheimschen Mittelwertbildungen, keine anderen algebraischen Hilfsmittel in Anspruch nehmen, als iterierte Quadratwurzeln, definiert der Verfasser zunächst das bestimmte Integral der Potenz mit ganzem positiven Exponenten, dehnt sodann diese Definition auf eine Potenzreihe nebst deren analytischen Fortsetzungen aus und gewinnt daraus die Möglichkeit, ein solches Integral in bekannter Weise mit Hilfe der Länge des Integrationsweges und des daselbst bestehenden Funktions-Maximums abzuschätzen. Daran schließt sich der Beweis des sogenannten Residuensatzes und des Cauchyschen Abschätzungssatzes für die Koeffizienten einer Potenzreihe.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

2. Herr Rückert legt Untersuchungen des Herrn Privatdozenten Dr. Stieve in Leipzig vor über die Spermalogenese (Samenbildung) und Orogenese (Eisbildung) des Grothnolens (Proteus anguineus).

Sitzung am 6. März.

1. Herr v. Seeliger legt eine Abhandlung vor:

Untersuchungen über das Sternsystem.

Zwei Fragen sind durch die früheren Untersuchungen des Verfassers in den Vordergrund getreten. Die eine bezieht sich auf die räumliche Verteilung der Sterne, die zweite auf die Bestimmung der Dimensionen des als endlich erkannten Systems. Das besonders anfangs sehr spärliche verwendbare Beobachtungsmaterial hat sich gerade in den letzten Jahren namentlich durch Benutzung photographischer Aufnahmen erheblich vermehrt. Wenn es auch jetzt noch lange nicht ausreichend ist, eine irgendwie definitive Lösung des großen Problems zu ermöglichen, so hat es doch immerhin viel sicherere Hinweise auf die Richtigkeit der vom Verfasser zugrunde gelegten Annahmen ergeben, als früher naturgemäß vorhanden

waren. Damit war die Veranlassung gegeben, die mathematische Aufgabe, auf welche der Verfasser schon vor 21 Jahren die ganze Frage zurückgeführt hat, von neuem zu diskutieren. Es handelt sich um die Lösung eines Systems von vier simultanen Integralgleichungen und es wurden einige Sätze abgeleitet, welche von erhöhter Bedeutung sein werden, wenn das Beobachtungsmaterial an Umfang und Genauigkeit gewonnen haben wird. Aber schon jetzt lassen sich Folgerungen ziehen, die Interesse darzubieten scheinen.

Übrigens hat der Verfasser nicht versäumt, auch seine früheren Methoden auf das neue Material anzuwenden, um zu zeigen, daß diese Anwendung durchaus durchführbar ist. Die Zahlenresultate, denen er nur eine provisorische Sicherheit zuerkennt, stimmen bei vernünftig angestellten Anforderungen mit den früheren genügend überein. Im Querschnitt ist die ganze Querdimension des Sternsystems, etwa 16000 Lichtjahre, d. h. das Licht, das in einer Sekunde 300000 Kilometer durchläuft, braucht zum Passieren dieser Strecke 16000 Jahre.

In der Richtung der Milchstraße ist die Ausdehnung erheblich größer, in der Richtung senkrecht darauf merklich kleiner. Die Gesamtzahl aller Sterne (also bis zu den schwächsten, die für kein Fernrohr mehr erreichbar sind, muß auf 6—10 Milliarden geschätzt werden.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

2. Herr Alfred Pringsheim:

Elementare Funktionentheorie und komplexe Integration.

Der Verfasser schickt zunächst eine Reihe von Bemerkungen voraus, die sich auf die prinzipielle Feststellung der Begriffe „elementare Methoden“ und „elementare Funktionentheorie“ beziehen. Dann zur „Elementarisierung“ der komplexen Integration übergehend, zeigt er zunächst, daß das bestimmte Integral der Potenz mit ganzem Exponenten, ausgenommen -1, und zwar für jeden beliebigen Integrations-

weg, der nur den Bedingungen der Stetigkeit und Rektifizierbarkeit (in der allgemeinsten Bedeutung) zu genügen hat, sich ganz direkt aus der üblichen Grenzwert-Definition mit Hilfe einer einfachen identischen Umformung berechnen läßt. Aus diesem Ergebnisse resultiert dann durch bloße Addition das entsprechende für eine Potenzreihe und schließlich für eine durch ein System ineinander greifender Potenzreihen definierte reguläre Funktion $f(x)$. Der Cauchy'sche Integralsatz über das Verschwinden von $\int f(x)\,dx$, erstreckt über einen geschlossenen, stetigen und rektifizierbaren Weg, erscheint dann als das unmittelbare Ergebnis eines einfachen Rechenexempels, zunächst für reguläre, d. h. in Potenzreihen entwickelbare Funktionen. Dieses Resultat läßt sich dann ohne Benützung der komplexen Integration mit Hilfe der vom Verfasser früher entwickelten Mittelwert-Methode auf stetig differenzierbare Funktionen übertragen, und der Cauchy'sche Integralsatz erscheint auf diese Weise mit demselben Grad von Allgemeinheit, wie er zuerst in Cours d'Analyse von C. Jordan durch wesentlich kompliziertere Betrachtungen hergeleitet wurde. Der Verfasser zeigt dann noch, wie auch das geschlossene, um den Nullpunkt erstreckte Integral $\int \frac{dx}{x}$ mit Hilfe einer sehr einfachen Grenzwert-Bestimmung ausgewertet werden kann und wie hieraus auf Grund der vorher bezeichneten Ergebnisse in wenigen Zeilen der Cauchy'sche Randintegral- und Residuensatz gewonnen wird.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

3. Herr Ludwig Burmester trägt vor:

Über den optischen Ausgleich in der Zeitlupe.

Die Zeitlupe ist ein kinematographischer Aufnahme-Apparat, der in der Sekunde bis 500 Aufnahmen schneller Bewegungsvorgänge ermöglicht, die bei der kinematographischen Vorführung verlangsamt, in den einzelnen Phasen anschaulich erkennbar werden. Der optische Ausgleich wird bewirkt ver-

mittelst einer rotierenden Trommel, auf deren Zylinderfläche sich schmale Spiegel befinden, welche die Seitenflächen eines regulären Prismas bilden. Die von dem bewegten Objekt ausgehenden Lichtstrahlen werden von je einem dieser Spiegel reflektiert, gehen durch ein Objektiv und erzeugen auf einem bewegten Film das jeweilige Bild des Objektes. Mit der Drehung der Trommel vollziehen die von dem betreffenden Spiegel reflektierten Lichtstrahlen eine Schwenkung, wobei jedem Spiegel ein Bild entspricht. Denn der Apparat ist so eingerichtet, daß der Film und die auf ihm entstehenden Bildpunkte gleiche Bewegungen ausführen. (Erscheint in den Sitzungsberichten.)

4. Herr Hönigschmid legte für die Sitzungsberichte vor:

Revision des Atomgewichtes des Wismuths, Analyse des Wismuthchlorids von O. Hönigschmid und L. Birkenbach.

Es wurde eine Revision des Atomgewichtes des Wismuths durch Analyse des geschmolzenen wasserfreien Wismuthchlorids ausgeführt.

5. Herr H. Liebmann legt die zweite, von ihm neu bearbeitete Auflage des Buches von R. Bonola vor: Die nichteuklidische Geometrie, historisch-kritische Darstellung ihrer Entwickelung.

Derselbe macht eine Mitteilung über räumliche Fachwerke vom Typus der Dreiecksflechtwerke. Diese sind im allgemeinen nach A. Föppl statisch bestimmt. Es werden zwei Ausnahmen angegeben, die besonders geometrisches Interesse bieten.

Ein Flechtwerk vom Oktaedertypus, d. h. ein Flechtwerk, das entsteht, wenn man die Ecken $ABCD$ eines windschiefen Vierseits mit zwei weiteren Punkten E und F verbindet, ist statisch unbestimmt, sobald E und F auf einer und derselben die Geraden (AB), (BC), (CD) und (DA) enthaltenden Fläche zweiten Grades liegen.

Ein Flechtwerk vom Dekaedertypus, d. h. ein Flechtwerk, das entsteht, wenn man die Ecken $ABCDE$ eines windschiefen Fünfseits mit zwei weiteren Punkten F und G verbindet, ist statisch unbestimmt, wenn G auf einer gewissen Fläche dritten Grades liegt, die die Geraden (AB), (BC), (CD), (DE), (EA) und noch fünf weitere, leicht angebbare, durch den Knotenpunkt F der Fläche gehende Gerade enthält.

Sitzung am 8. Mai.

1. Herr Sommerfeld legt eine Photographie der Sonnenfinsternis vom 29. Mai 1919 vor, die von englischen Astronomen aufgenommen ist, und erläutert an einem Diagramm, daß sie überraschend genau mit Einsteins allgemeiner Relativitätstheorie übereinstimmt. Im Anschluß daran bespricht er die Grundlagen dieser Theorie.

2. Herr H. Liebmann legt vor:

Ausnahmefachwerke und ihre Determinanten.

Es werden eine Reihe von Sätzen über die Grenzfälle statisch bestimmter Fachwerke bewiesen. Insbesondere werden die „gefährlichen Örter" der einzelnen Knotenpunkte untersucht, an die sie gebunden sind, wenn die andern Knotenpunkte im Raum festliegen und zugleich der Grenzfall vorliegt. Ferner wird u. a. gezeigt, daß jedes Ausnahmefachwerk bei allen Kollineationen Ausnahmefachwerk bleibt.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

3. Herr A. Voss legt eine Arbeit vor:

Über die allgemeinen Beziehungen zwischen zwei Flächen, die einander durch das Prinzip der Inversion entsprechen. (Erscheint in den Sitzungsberichten.)

4. Herr Föppl legt eine Abhandlung vor:

Über die Beanspruchung eines Stabes vom elliptischen Querschnitt auf Drillen bei behinderter Querschnittswölbung.

Für einen Stab, der an einem Ende eingespannt ist, während das freie Ende durch ein drillendes Kräftepaar belastet wird, werden die Spannungen und der Drillungswinkel nach dem von Ritz angegebenen Näherungsverfahren berechnet. Die größten Spannungen treten im Einspannquerschnitt auf

und zwar an jener Stelle des Umfangs, für die das Produkt aus den Abständen von den beiden Querschnittshauptachsen seinen größten Wert annimmt. Sie sind Zug- oder Druckspannungen und bei stark abgeplatteten Querschnittsellipsen ungefähr 1,6 mal so groß wie die größten Schubspannungen nach der Theorie von de St. Venant. Der Drillingswinkel fällt kleiner aus als bei nicht eingespanntem Ende. Andere Belastungsfälle können nach demselben Verfahren untersucht werden. (Erscheint in den Sitzungsberichten.)

5. Herr Alfred Pringsheim spricht:

Über eine Konvergenzbedingung für unendliche Reihen, die durch iterierte Mittelbildung reduzibel sind.

Ein von Herrn G. H. Hardy herrührender Satz besagt, daß eine „*summierbare*“ (nach der Terminologie des Verfassers „*reduzible*“) Reihe mit reellen Gliedern a_ν *konvergiert*, wenn die Zahlen νa_ν *beschränkt* sind. Herr E. Landau hat die letztere Voraussetzung dahin erweitert, daß es schon genügt, wenn die νa_ν *nach unten beschränkt* sind. Obschon die zwei Beweise, welche er für den so erweiterten Satz gibt, prinzipiell etwas einfacher sind, als der entsprechende Hardysche Beweis, so scheinen sie mir doch bei weitem noch nicht den wünschenswerten Grad von Einfachheit zu besitzen. Bei der unbestreitbaren Nützlichkeit des fraglichen Satzes dürfte daher der vom Verfasser hier mitgeteilte, wesentlich durchsichtigere und kürzere Beweis nicht überflüssig erscheinen, ebensowenig wie die daran geknüpfte prinzipielle Bemerkung über die Tragweite der Landauschen Erweiterung.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

6. Derselbe legt vor G. Polya (Zürich):

Geometrisches über die Verteilung der Nullstellen gewisser ganzer transzendenter Funktionen.

Der Verfasser betrachtet ganze transzendente Funktionen von der Form:

$$F(z) = P_1(z)\,e^{a_1 z} + P_2(z)\,e^{a_2 z} + \cdots + P_m(z)\,e^{a_m z},$$

wo die $P_\nu(z)$ Polynome, die a_ν Konstanten bedeuten, und macht Angaben über den Zusammenhang der Verteilung ihrer Nullstellen mit der Gestalt des kleinsten konvexen Polygons $\mathfrak{A}$, welches die zu den a_ν konjugierten Punkte a_ν umfaßt. Diese Nullstellen a_ν schließen sich asymptotisch denjenigen Halbstrahlen an, welche den äußeren Normalen von $\mathfrak{A}$ parallel sind. Die Anzahl der einem solchen Halbstrahle sich anschließenden Nullstellen hängt asymptotisch zusammen mit der Länge derjenigen Polygonseite, welche auf der Richtung jenes Halbstrahls senkrecht steht. Wird ferner unter a eine gewisse als „Winkelschwerpunkt" von $\mathfrak{A}$ bezeichnete und entsprechend definierte Konstante verstanden und $F(0) \neq 0$ vorausgesetzt, so ergibt sich:

$$F(z) = F(0) \cdot e^{a z} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_\nu}\right),$$

falls die Nullstellen a_ν nach niemals abnehmenden Absolutwerten geordnet sind. — Mit Rücksicht auf den beschränkten Raum hat sich der Verfasser damit begnügt, den Gang der mit allgemein üblichen funktionentheoretischen Mitteln durchführbaren Beweise kurz zu skizzieren.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

7. Herr Richard Hertwig legt vor eine Arbeit des Kustos an der zoologischen Staatssammlung Herrn Dr. Balss über

Ostasiatische Decapoden.

Dieselbe behandelt im Anschluß an frühere Veröffentlichungen die Krabben-Ausbeute, welche Prof. Doflein von seiner Reise nach Japan mitgebracht hat, und berücksichtigt zugleich auch das von anderen Expeditionen stammende Material, welches im Münchener Museum vorhanden ist. Von den 62 Arten ist nahezu $^1/_3$ (19) in Japan endemisch, darunter 2 neue Arten sowie eine neue Gattung. Auffallend ist, daß die Krabben-Fauna zwar im allgemeinen den indo-pacifischen

Charakter trägt, dagegen keine Beziehungen zu den nordamerikanischen Küsten des stillen Ozeans erkennen läßt, während für die langschwanzigen Decapoden solche Beziehungen erkennbar sind. Überraschend ist, daß eine Tiefseeform des Mittelmeers und der Nordsee auch in der Sagamibai gefunden wurde.

Sitzung am 5. Juni.

1. Herr H. Wieland legt zwei in Gemeinschaft mit P. Weyland ausgeführte Arbeiten vor:

a) Zur Kenntnis der Lithocholsäure. Diese von Hans Pinner in Rindergallensteinen aufgefundene Säure bildet einen normalen Bestandteil der Rindergalle. Die Ermittlung ihrer Konstitution zeigt, daß sie als Meno-oxysäure von der Zusammensetzung $C_{24}H_{40}O_3$ sich eng an die beiden bisher erforschten Gallensäuren, die Cholsäure und die Desoxy-cholsäure anschließt.

(Die Veröffentlichung erfolgt an anderer Stelle.)

b) Über den Giftstoff der Kröte. Es ist gelungen, die Struktur des von dem Vortragenden im Jahre 1912 isolierten Krötengiftes, des Bufotalins, in mehreren wichtigen Einzelheiten aufzuklären. Die Untersuchung führt zu dem Resultat, daß der Giftstoff ein Abbauprodukt des Cholesterins und mit der Gallensäure nahe verwandt ist.

(Die Arbeit wird in den Sitzungsberichten veröffentlicht.)

2. Herr M. Schmidt berichtet über neuzeitliche tektonische Bewegungen im bayerischen Alpenvorland, die im Sinne des Vorrückens der Alpen nach Norden und in noch höherem Maße in der Richtung von Osten nach Westen durch geodätische Messungen der Lageänderung von Hauptdreieckspunkten mit größter Zuverlässigkeit nachgewiesen sind. Dieselben zeigen seit der ersten Hälfte des vorigen Jahrhunderts westlich von München Beträge bis zu eineinhalb Meter, gegen

die bayerische Ostgrenze hin aber geringere Werte, während die Lage von München selbst als unverändert vorausgesetzt ist. Diese Bewegungen sind als ein Nachklingen der in früheren geologischen Perioden in der Alpengegend eingetretenen Umlagerungen in der Erdkruste aufzufassen.

3. Herr F. Broili macht Mitteilung von einem durch den Herrn Lehramtskandidaten K. Holl in den Kössener Schichten der Kothalpe am Wendelstein gemachten Fund eines Schädelrestes der Reptilgruppe der Placodontier.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

4. Herr A. Pringsheim legt vor:

Oskar Perron, Über eine Verallgemeinerung des Stolzschen Irrationalitätssatzes. II.

Der Verfasser hat in einer Mitteilung mit gleichem Titel, die im Jahrgang 1908 dieser Berichte erschienen ist, die Stolzsche Verallgemeinerung des bekannten Legendreschen Satzes über die Irrationalität gewisser Kettenbrüche auf die Jakobischen Kettenbruchalgorithmen übertragen. Der damalige Beweis erstreckte sich jedoch nur bis zu Ketten vierter Ordnung. In der vorliegenden Note ersetzt der Verfasser zunächst den früheren höchst umständlichen Beweis eines grundlegenden Hilfssatzes durch einen äußerst einfachen, knüpft daran noch bemerkenswerte Verallgemeinerungen und beweist schließlich den fraglichen Hauptsatz für Ketten beliebiger Ordnung.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

5. Herr v. Groth legt eine Abhandlung von Herrn Johnsen in Kiel vor:

Über die Paragenese von α-Quarz und Kohlensäure.

Die Anwendung der Clausius-Clapayronschen Gleichung auf die Umwandlung von α-Quarz in β-Quarz ergibt, daß die Umwandlungstemperatur pro Atmosphäre Druckzuwachs um etwa $^1/_{100}$ Celsiusgrad ansteigt. Setzt man die geotherme Tiefen-

stufe gleich 33 m pro Celsiusgrad und die geobare Tiefenstufe gleich 4 m pro Atmosphäre, so ergibt sich die größte Erdtiefe, in welcher α-Quarz und nicht β-Quarz entsteht, zu rund 21 km; der hier herrschende Druck (5300 Atmosphären) hat die Umwandlungstemperatur des Quarzes um 64°, also von 575° auf 639° erhöht und diese Temperatur herrscht eben in 21 km Tiefe.

Da diejenigen Quarze, die sich als frei von Zwillingsbildung nach dem sogenannten Schweizer Gesetz erweisen, bekanntermaßen nicht aus β-Quarz hervorgegangen sein können, so müssen sie sich in der äußersten, 21 km mächtigen Erdhülle gebildet haben.

Noch genauere Aussagen über Druck, Temperatur und Erdtiefe der Bildung von Quarz lassen sich dann machen, wenn dieser einen mit flüssiger und dampfförmiger Kohlensäure erfüllten Hohlraum aufweist wie z. B. manche Amethyste von Mursinka im Ural. Aus dem Volumverhältnis der flüssigen und der dampfförmigen Phase bei Zimmertemperatur läßt sich berechnen, welche Dichte die Kohlensäure zu der Zeit hatte, als sie von dem wachsenden Amethyst umschlossen wurde. Sodann gestattet die van der Waalssche Zustandsgleichung, die Isochore der Kohlensäure für jene Dichte zu konstruieren. Die zusammengehörigen Druck- und Temperaturwerte dieser Isochore setzt man in Beziehung zu denjenigen der Quarzumwandlung. Es ergibt sich dann, daß jene Amethyste in einer Tiefe von höchstens $6^1/_2$ km gebildet sind und daß die Bildungstemperatur 100 bis 400° oberhalb derjenigen lag, die der betreffenden Erdtiefe normalerweise entspricht; der Amethyst stellt also ein thermales Produkt dar.

Wendet man diese Methoden auf Quarzkristalloblasten an, so wird man dadurch vielleicht auch über Gesteinsmetamorphose und über die Bildung kristalliner Schiefer genauere Vorstellungen gewinnen. (Erscheint in den Sitzungsberichten.)

Sitzung am 3. Juli.

1. Herr S. Zenneck trägt vor:

Arbeit auf drahtlos-telegraphischem Gebiete in Nordamerika während des Krieges.

Der Vortragende besprach im Zusammenhang mit seinen Arbeiten in Nordamerika während des Krieges die neueren Sende- und Empfangs-Methoden in der drahtlosen Telegraphie, besonders die Frequenzwandler im Sender und die Elektronen-Relais im Empfänger.

2. Herr E. Stromer v. Reichenbach gibt

Mitteilungen über Wirbeltier-Reste aus dem Mittelpliocän des Natrontales (Ägypten). 5. Nachtrag zu 1. Affen und zu 2. Raubtiere.

Aus jungtertiären Deltaablagerungen des libyschen Urniles hat der Autor schon 1913 Affen- und Raubtier-Reste beschrieben, darunter einen der besterhaltenen Affenschädel (Libypithecus n. g.) überhaupt. Vereinzelte Zähne und Zahnstücke, der Freiburger Universitäts-Sammlung gehörig, erlauben nun, nicht unwichtige Nachträge zu machen. U. a. läßt sich eine neue Art der bisher nur aus dem Oberpliocän Italiens bekannten Gattung Aulaxinuus nachweisen und das Vorkommen eines echten Pavians, von ein oder zwei weiteren Affenarten und von im ganzen drei deutlich verschiedenen Fischotterarten feststellen. Damit ist ein verhältnismäßig großer einstiger Reichtum von Affen und Fischottern in einem Gebiete nachgewiesen, in welchem sie heute vollkommen fehlen, und es lassen sich daraus sowie aus den einzelnen Formen manche systematische, tiergeographische und biologische Schlüsse ziehen.

(Erscheint in den Sitzungsberichten.)

3. Herr S. Günther legt für die Sitzungsberichte einen Aufsatz vor:

Die optischen Beweise für die Erdkrümmung sonst und jetzt.

Seit einigen Jahrzehnten weiß man, daß die Messung des Spiegelbildes von Sonne oder Mond in einer größeren Wasserfläche diese letztere als Konvexspiegel erkennen läßt. Schon vor bald dreihundert Jahren fand eine Kontroverse zwischen Kepler und Chiaramonti statt, deren Gegenstand einigermaßen an diese modernen Beobachtungen erinnert. Auf den Streit wird näher eingegangen.

4. Herr R. Emden spricht über

Sonnenatmosphäre und Einsteineffekt.

Es wird nachgewiesen, daß eine regelmäßig geschichtete Sonnenatmosphäre durch Refraktionswirkung eine Abbiegung der Lichtstrahlen in der Größe des Einsteineffektes nicht bewirken kann. (Erscheint in den Sitzungsberichten.)

Sitzung am 6. November.

1. Herr P. v. Groth berichtete unter Vorlage einer Anzahl von Exemplaren der daran besonders reichen mineralogischen Staatssammlung über das seltene Berylliumsilikat Phenakit und speziell über die neuerdings erfolgte Auffindung desselben in Bayern. Diese ist dem Sammeleifer des Lehrers Herrn L. Baumann in Nagel bei Brand, südlich Wunsiedel im Fichtelgebirge, zu verdanken; die in Drusen des dortigen Granits aufgewachsenen Krystalle wurden von dem Konservator der Sammlung Herrn Dr. C. Mieleitner als Phenakit erkannt und genauer untersucht, wobei sich dieses Vorkommen als eines bestkrystallisierten des bisher nur an einer kleinen Zahl von Fundorten beobachteten Minerals, sämtlich in pneumatologischen Bildungen gelegen, erwies.

Herr R. Willstätter trägt eine in Gemeinschaft mit Herrn E. Waldschmidt-Leitz ausgeführte Arbeit vor über

Hydrierung mit Hilfe von Metallen.

Die Untersuchung behandelt den Einfluß des Sauerstoffs auf die katalytische Wasserstoffübertragung durch Platin- und Palladiummohr und durch die kolloiden Metalle sowie durch Nickel.

Ferner spricht Herr Willstätter über eine gemeinsam mit Herrn F. Racke ausgeführte Untersuchung

Über das Invertin der Hefe.

In dieser Arbeit wird der Zustand geprüft, in welchem die Hefezelle die Kohlehydratspaltenden Enzyme enthält. Ferner wird das Verhalten des Invertins gegen Adsorptionsmittel untersucht und es werden Verfahren zur Trennung von den Begleitstoffen darauf gegründet. Auf diesem Wege führt die Arbeit zu Präparaten, in denen das Invertin einen höheren Reinheitsgrad als in bisher beschriebenen aufweist.

Sitzung am 4. Dezember.

1. Herr Th. Paul hielt einen Vortrag:

Der Süßungsgrad von Saccharin und Dulcin.

Ausgedehnte mit zahlreichen Versuchspersonen angestellte Versuche, bei denen die sog. Konstanzmethode benutzt wurde, führten zu dem überraschenden Ergebnis, daß sich der Süßungsgrad (Süßkraft) der künstlichen Süßstoffe im Vergleich mit Zucker nicht, wie man bisher allgemein annahm, durch ein unveränderliches Zahlenverhältnis (krystalloses Saccharin 1 : 450 und Dulcin 1 : 250) darstellen läßt. Der Süßungsgrad ändert sich vielmehr mit der Konzentration, d. h. der Menge des gelösten Süßstoffes. Er schwankt bei Saccharin ungefähr zwischen 200 und 700, bei Dulcin zwischen 70 und 350. Ferner wurde die merkwürdige und für die Praxis wichtige Tatsache festgestellt, daß sich der Süßungsgrad des Saccharins durch Zusatz des weniger süß schmeckenden Dulcins unverhältnismäßig stark erhöhen läßt. So wird z. B. der Süßungsgrad einer Lösung von 280 mg Saccharin in 1 Liter Wasser durch weiteres Auflösen von nur 120 mg Dulcin so gesteigert, daß die Lösung gerade so süß schmeckt wie eine solche, die 535 mg Saccharin enthält. Der Süßungsgrad des Saccharins ist also beinahe auf das Doppelte gesteigert und eine Ersparnis von etwa 33 % an Süßstoff erzielt worden. Hierzu kommt, daß das Dulcin die Saccharinlösung viel angenehmer süß und vollmundiger macht. Das Dulcin, das überdies viel kochbeständiger ist als das Saccharin, muß demnach beim Süßen unserer Lebensmittel eine viel größere Rolle spielen als bisher. Während des Krieges wurden in Deutschland ungeheuere Mengen Saccharin und Dulcin zum Süßen von Speisen und Getränken benutzt. Wenn die vorstehend mitgeteilten Tatsachen früher bekannt gewesen wären, hätten sich die Süßstoffe viel sparsamer und rationeller verwenden lassen.

2. Herr R. Hertwig sprach über

Geschlechtsbestimmung bei Fröschen.

Seine Untersuchungen im Sommer 1919 und 1920 wurden am Wasserfrosch angestellt und ergaben eine Bestätigung des schon früher von dem Vortragenden erhaltenen Resultats, daß im Uterus überreif gewordene Eier ausschließlich Männchen liefern, während bei normaler Reife gleich viel Männchen wie Weibchen entstehen. Die Untersuchungen machten es ferner wahrscheinlich, daß die Umstimmung des Geschlechts nicht während der Eireife geschieht, sondern erst nach der Befruchtung, indem von dem überreifen Protoplasma Einflüsse ausgehen, welche auch die Eier mit weiblichem Chromosomenbestand veranlassen, sich zu Männchen zu entwickeln.

Verzeichnis der im Jahre 1920 eingelaufenen Druckschriften.

Die Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichnis als Empfangsbestätigung zu betrachten.

Aarau. Historische Gesellschaft des Kantons Aargau:
— — Argovia, Bd. 36(1915)—38(1920).

Aberdeen. University:
— — Studies, No. 66—70. 73. 76. 78.

Abo. Akademie:
— — Acta, a) Humaniora, Bd. 1.

Allegheny. Observatory:
— — Publications, vol. 4. No. 1—5; vol. 5, No. 1—5; vol. 6, No. 1—3.

Amsterdam. Academie van Wetenschappen:
— — Verhandelingen (Phil.-hist. Abtlg.), deel XV. XVIII, 2.
— — „ (Math.-nat. Abtlg.), deel XII, No. 4 u. 5.
— — Jaarboek 1917.
— — Prijsvers 1918.
— — Zittingsverslagen, deel XXVI, No. 1 u. 2.
— K. N. aardrijkskundig Genootschap:
— — Tijdschrift, deel 37, No. 2—6, deel 38, No. 1.
— Wiskundig Genootschap (Société de mathémat.):
— — Nieuw archief, deel 13 No. 1 u. 2.
— — Wiskundige opgaven, deel 13, Nr. 1 u. 2.
— — Revue des publications mathématiques, t. 27, No. 1 u. 2 und 28, 1.
— — Oeuvres de Stieltjes, t. 2, 1918.

Ansbach. Historischer Verein für Mittelfranken:
— — Jahresbericht 62, 1919.

Athen. Bibliothèque de l'école française.
— — Bulletin du correspondance hellénique 44 (1920), No. 1—6.

Barcelona. Camera oficial del libro:
— — Bibliografia, año II, No. 7.

Barcelona. R. Academia de Ciencias y Artes:
— — Memorias, vol. 15, No. 11—18; vol. 16, Nr. 1.
— — Nomina del personel 1919/20.
— Institut d'estudis Catalans:
— — Butlleti de la biblioteca de Catalanya No. 4—7.

Basel. Naturforschende Gesellschaft:
— — Verhandlungen. Bd. 30 u. 31.
— Universitätsbibliothek:
— — Jahresverzeichnis der Schweizer Universitätsschriften 1918/19.
— — Universitätsschriften 1918/19.

Batavia. Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen:
— — Verhandelingen, deel 61, 5 u. 6.
— — Rapporten van de commissie in Nederlandsch-Indie 1913—1915.
— — Oudheidkundig verslag 1915—1919; 1920, 1.
— — 8 Einzelschriften.
— — Tijdschrift voor Indische taal-, land- en volkenkunde, deel 57—59.
— — Notulen van de vergaderingen 53(1915)—57(1919.
— Observatorium:
— — Seismological bulletin 1916, 11 u. 12; 1917—19; 1920. 1. 2. 7—10.
— — Observations made at secondary stations, vol. 4—7.
— — Regenwarnemingen 1915—1917.
— — Observations 37. 38.
— — Maand- en jaargemiddelsen 1879—1917.
— Naturkundige vereenigung in Nederlandsch-Indie:
— — Tijdschrift 77—80.
— — Het Idjen-Hoogland, Monografie 5, 1.

Belgrad. Serbische Akademie der Wissenschaften:
— — Glas 91. 94.
— — Godišnjak 26. 27.
— — Spomenik 52. 1914.
— — Srpski etnografski zbornik 19.
— — Zbornik istorijski 11. 15.

Bergen. Museum:
— — Aarbok 1917/18 und 1918/19.
— — Aarsberetning 1918/19.
— — Sars, Crustacea, vol. 7. 1—6.

Berlin. Akademie der Wissenschaften:
— — Abhandlungen phil.-hist. Kl. 1920, 1.
— — „ physik.-math. Kl. 1919. 1920. 1.
— — Sitzungsberichte 1920. 1—33.

Berlin. Archiv der Mathematik und Physik:
— — Archiv, Bd. 28, 3 u. 4.
— Allg. Elektrizitätsgesellschaft:
— — Geschäftsbericht 1919/20.
— Deutsche Chemische Gesellschaft:
— — Berichte 52, 12; 53, 1—11; 54, 1.
— — Chemisches Zentralblatt 1920, 3—26; 1921, 1—4.
— Deutsche Geologische Gesellschaft:
— — Zeitschrift: Abhandlungen 71, 3—12.
— Medizinische Gesellschaft:
— — Verhandlungen 48—50.
— Deutsche Physikalische Gesellschaft:
— — Fortschritte der Physik 74 (1918), 1—3.
— — Verhandlungen, 3. Reihe, Jahrg. 1, 1—4.
— Deutsches Archäologisches Institut:
— — Jahrbuch 34, 1—4 und 35, 1—2.
— — Bibliographie 1918/19.
— Meteorologisches Institut:
— — Veröffentlichungen 304—310.
— Preuß. Geologische Landesanstalt:
— — Abhandlungen 77.
— — Jahrbuch 38 I 3 und II 1 u. 2; 39 I 1 u. 2.
— Astronomisches Recheninstitut:
— — Berliner Astronomisches Jahrbuch 1922.
— — Kleine Planeten 1921.
— Verein zur Beförderung des Gartenbaues:
— — Gartenflora 1920, 1—12; 1921, 1—2.
— — Mitteilungsblatt 1 u. 2.
— Verein für die Geschichte Berlins:
— — Mitteilungen 1920, 1—14; 1921, 1.
— — Mitteilungsblatt 1.
— Verein für Geschichte der Mark Brandenburg:
— — Forschungen zur brandenburgisch-preußischen Geschichte 33, 1.
— Zeitschrift für Instrumentenkunde:
— — Zeitschrift 1920, 1—12.

Bern. Historischer Verein des Kantons Bern:
— — Archiv, Bd. 25, 1.
— Schweizerische Naturforschende Gesellschaft:
— — Actes de la 98. et 99. session.
— Universitätskanzlei:
— — Schriften für 1920.

Beuron. Erzabtei.
— — Benediktinische Monatsschrift 2, 3—8; 3, 1 u. 2.
— — Texte und Arbeiten 5.
— — Ecclesia orans 4 u. 5.

Bologna. Accademia:
— — Rendiconto, ser. I, vol. 8 (1914/15) und vol. 9 (1915/16); ser. II, vol. 1 (1916/17), vol. 2 (1917/18), vol. 3 (1918/19).
— — Memorie A: Scz. di scienze storiche-filol., ser. I, vol. 1, fasc. 1—3; vol. 3, fasc. 2; vol. 4; vol. 5, fasc. 1; vol. 6—10. ser. II, vol. 1 u. 2.
— — Memorie B: Sez. di scienze giuridiche, ser. I, vol. 1—10; ser. II, vol. 1—3.
— — Memorie C: Classe di scienze fisiche, ser. VI, vol. 6—9.

Bonn. Verein von Altertumsfreunden im Rheinland:
— — Berichte der Provinzialkommission für Denkmalpflege 1916—18.
— — Bonner Jahrbücher, Heft 125.
— Naturhistorischer Verein der preuß. Rheinlande:
— — Sitzungsberichte 1919, 1 u. 2.
— — Verhandlungen, Jahrg. 75 (1918) und 76 (1919).

Bromberg. Stadtbibliothek:
— — Mitteilungen, Jahrg. 11 Nr. 4—6; Sonderheft 1920.

Budapest. Ungarische Ethnographische Gesellschaft:
— — Ethnographia, Jahrg. 30, 1—6.
— Commission interallié du Danube:
— — Le Danube international, Jahrg. 1, 1—16; Jahrg. 2, 1.
— Reichsanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus:
— — Jahrbücher, Bd. 40—44.
— — Verzeichnis der Bücher 10—14.
— Ungarische ornithologische Zentrale:
— — Aquila 25 u. 26.

Buenos Aires. Museo Nacional:
— — Anales, Bd. 25. 1914.

Buitenzorg (Java). Departement van landbouw:
— — Bulletin du jardin botanique, No. 1, fasc. 5 und No. 2, fasc. 1—3.
— — Jaarboek 1918.
— — Mededeelingen van het algem. proefstation 4 u. 5.
— — Mededeelingen voor thee 66 u. 67.
— — Mededeelingen van de afdeeling voor plantenziekten 38—42.

Bukarest. Academia Română:
— — Bulletin de la section historique, année 5 u. 6.
— — Bulletin de la section scientifique 6 (1919/20), No. 1—4.

Cambridge. Philosophical Society:
— — Transactions, vol. 22, No. 5—22.
— — Proceedings, vol. 18, 1—6; vol. 19, 1—6; vol. 20, 1.
— Tufts College:
— — Studies, vol. 4, No. 3—4.
— Astronomical Observatory:
— — Annual report of the Observatory syndicate 1914/15—1919/20.
— — Circulars 219—221.

Charlottenburg. Physikalisch-technische Reichsanstalt:
— — Die Tätigkeit der physikal.-techn. Reichsanstalt im Jahre 1919.

Chicago. Wilson Ornithological Club:
— — The Wilson Bulletin, No. 90—113.

Christiania. Videnskabs Selskabet:
— — Forhandlingar 1916—1918.
— — Skrifter 1916—1918.

Chur. Historisch-antiquarische Gesellschaft für Graubünden:
— — Jahresbericht 49.

Cleveland. Archaeological Institute of America:
— — American Journal of Archaeology, vol. 22, 1—3; 23, 4; 24, 1—3.

Colmar. Naturhistorische Gesellschaft:
— — Mitteilungen 15. 1918/19.

Columbus. Ohio State University:
— — Journal of industrial and engineering chemistry, vol. 12 (1920); vol. 13 (1921), No. 1.

Cordoba. Academia National de ciencias:
— — Boletin, Bd. 20—24, 1 u. 2.

Danzig. Westpreußischer Geschichtsverein:
— — Zeitschrift 60.
— Technische Hochschule:
— — Personalverzeichnis W.S. 1920/21.

Darmstadt. Historischer Verein für Hessen:
— — Quartalblätter, Bd. 6, Nr. 9—16.

Davos. Meteorologische Station:
— — Wetterkarten 1920.
— — Jahresübersicht 1920.

Delft. Technische Hochschule:
— — Dissertationen 1920.

Donaueschingen. Verein für Geschichte und Naturgeschichte der Baar:
— — Schriften 14 (1920).

Dresden. Sächsischer Altertumsverein:
— — Neues Archiv für sächsische Geschichte 41.
— — Jahresbericht 1919.
— Journal für praktische Chemie:
— — Journal 1919, Nr. 3-24; 1920, Nr. 1—9.

Drontheim. Norske Videnskabens Selskab:
— — Aarsberetning 1917.

Dublin. Royal Dublin Society:
— — Economic Proceedings, vol. 2, 8—11.
— — Scientific Proceedings, vol. 14. 17—23.

Dürkheim. Pollichia:
— — Mitteilungen 31 (1918/19).

Edinburgh. Mathematical Society:
— — Proceedings, vol. 31 (1912/13)—37 (1918/19).
— Royal Society:
— — Proceedings, vol. 35—38; 39, 1—2.
— — Transactions, vol. 50—52, 3.

Eisenberg. Geschichts- und altertumsforschender Verein:
— — Mitteilungen, Heft 34.

Emden. Gesellschaft für bildende Kunst und vaterländische Altertümer:
— — Jahrbuch 20 (1920).
— — Uptalsboom-Blätter, Jahrg. 9.

Erlangen. Universitätsbibliothek:
— — Dissertationen 1920.

Florenz. R. Istituto di studi superiori:
— — Sezione di filosofia, N. S., vol. 1.
— — Cassuto. — Melli. — Puini. — Pasquali. — Billia.
— Società Asiatica Italiana:
— — Giornale 26.

Frankfurt a. M. Römisch-germanische Kommission des „Deutschen Archäologischen Instituts":
— — Bericht über die Fortschritte der römisch-germanischen Forschung 11 (1920).
— — Kataloge west- und süddeutscher Sammlungen 4 (1920).
— — Korrespondenzblatt „Germania" 4, 1—6.
— Physikalischer Verein:
— — Jahresbericht 1918/19.

Frauenfeld. Thurgauische Naturforschende Gesellschaft:
— — Mitteilungen 23.

Freiburg i. Br. Breisgau-Verein:
— — „Schau ins Land" 46.
— Kirchengeschichtlicher Verein:
— — Diözesanarchiv 47. 48.
— Universitätsbibliothek:
— — Dissertationen 1920.

Freising. Historischer Verein:
— — Sammelblatt 12 (1920).

Friedrichshafen. Verein zur Geschichte des Bodensees:
— — Schriften 48 (1919).

Fürth. Gymnasium:
— — Jahresbericht 1919/20.

Fukuoka (Japan). Universität:
— — Mitteilungen aus der medizinischen Fakultät, Bd. 3—5. 1917—20.

Geestemünde. Männer vom Morgenstern:
— — Jahresbericht 18.
— — Mitteilungen Nr. 3.

Genf. Institut National Genevois:
— — Bulletin 41—43.
— Journal de chimie physique:
— — Journal, Bd. 17, 4; 18, 1—3.
— Observatoire:
— — Resumé météorologique 1918.
— Société d'histoire et d'archéologie:
— — Bulletin 4, 3—6.
— — Mémoires et documents 5. 1919.
— Société de physique et d'histoire naturelle:
— — Mémoires, vol. 39, 3—4.
— — Compte rendu des séances 37, 1—3.

Giessen. Oberhessischer Geschichtsverein:
— — Mitteilungen 23 (1920).
— Oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde:
— — Bericht der medizinischen Abteilung 12.
— Universitätsbibliothek:
— — Schriften 1920.

Görlitz. Gesellschaft für Anthropologie und Urgeschichte:
— — Jahreshefte, Bd. 3, Heft 1.

Göteborg. Högskola:
— — Årskrift, Bd. 18—24 (1912—1918).
— — Handlingar 14—20 (1911/12—1917).

Göttingen. Gesellschaft der Wissenschaften:
— — Abhandlungen der mathem.-physikal. Klasse, Bd. 10, Nr. 5 u. 6.
— — Göttingische gelehrte Anzeigen 1919, 9—12.
— — Nachrichten der philol.-hist. Klasse 1919, 1—3; 1920, 1.
— — „ der mathematischen Klasse 1919, 2—3 und Beiheft; 1920, 1.
— — Geschäftliche Mitteilungen 1920, 1.
— Universitätsbibliothek:
— — Dissertationen 1920.

Granville. Scientific Association of Denison University:
— — Bulletin 18, 1—7; 19, 1—8.

Graz. Universitätsbibliothek:
— — Verzeichnis der akademischen Behörden 1919/20.
— — Verzeichnis der Vorlesungen S.-S. 1920 und W.-S. 1920/21.

Greifswald. Rügisch-Pommerscher Geschichtsverein:
— — Pommersche Jahrbücher 20 und Erg.-Bd. 3.
— Naturwissenschaftlicher Kreis für Neuvorpommern und Rügen:
— — Mitteilungen 46 und 47.

Groningen. Astronomisches Laboratorium:
— — Publications 29—30.
— Verlag Wolters:
— — Neophilologus, Ig. 4, 1—4; 5, 1—2.

Guben. Gesellschaft für Anthropologie und Altertumskunde:
— — Niederlausitzer Mitteilungen, Bd. 14, 5—8.

Haag. Gesellschaft zur Verteidigung der christlichen Religion:
— — Programm für 1920.
— K. Instituut voor de taal-, land- en volkenkunde van Nederlandsch-Indie:
— — Bijdragen, deel 76, 1—4.
— — Naamlijst 1920.

Haarlem. Hollandsche Maatschappij der wetenschappen:
— — Archives Néerlandaises de physiologie de l'homme et des animaux, tom. 5, No. 1.
— — Oeuvres de Huygens, vol. 13.

Hall in Württemberg. Histor. Verein für württemberg. Franken:
— — Württembergisch Franken, N. F., Heft 12.

Halle. Leopoldinisch-Karolinische Deutsche Akademie der Naturforscher:
— — Leopoldina 56.
— Deutsche Morgenländische Gesellschaft:
— — Abhandlungen, Bd. 15, 2.
— — Zeitschrift 74, 2—4.
— Thüringisch-Sächsischer Verein für Erforschung des vaterländischen Altertums:
— — Hundertjahrfeier 1920.
— — Thüring.-sächs. Zeitschrift für Geschichte und Kunst, Bd. 10, 1.
— Universitätsbibliothek:
— — Schriften 1920.

Hamburg. Stadtbibliothek:
— — Entwurf des Hamburgischen Stadtbudgets 1919 und 1920.
— — Jahrbuch der wissenschaftlichen Anstalten Hamburgs, Jahrbuch 1917 (35), Beiheft 1—8; Jahrbuch 1918 (36), Beiheft 1—5.
— — Max Lenz: Für die Hamburgische Universität, Hamburg 1918.
— — Staatshaushaltsberechnung 1917 und 1918.
— — Verhandlungen zwischen Senat und Bürgerschaft 1918 und 1919.
— Mathematische Gesellschaft:
— — Mitteilungen 5, Nr. 8.
— Deutsche Seewarte:
— — Annalen der Hydrographie 48 und 49, 1.
— — Aerologische und hydrographische Beobachtungen der Marinestationen während der Kriegszeit, Heft 1.
— — Jahresbericht 37—41.
— Verein für Hamburgische Geschichte:
— — Mitteilungen 39 und 40, 1.
— — Zeitschrift 24, 1.
— Naturwissenschaftlicher Verein:
— — Abhandlungen 21, 1—2.
— — Verhandlungen 24—27.
— Verein für naturwissenschaftliche Unterhaltung:
— — Verhandlungen 16.

Hanau. Geschichtsverein:
— — Hanauer Geschichtsblätter, Heft 3 und 4.

Hannover. Naturhistorische Gesellschaft:
— — Jahresbericht 62—68.
— Technische Hochschule:
— — Dissertationen 1920.
— Verein für Geschichte der Stadt Hannover:
— — Hannoversche Geschichtsblätter 23.

Hannover. Historischer Verein für Niedersachsen:
— — Zeitschrift 84.

Hartford. Geological and Natural History Survey:
— — Bulletin 28.

Heidelberg. Akademie der Wissenschaften:
— — Abhandlungen der mathemat Klasse 8.
— — Jahresheft 1919.
— — Sitzungsberichte der philosoph. Klasse 1919. 1920, 1—11.
— — „ der mathemat.-naturw. Klasse 1919 A, 10—18; B 3—15; 1920 A, 1—8; B 1.
— — Bericht über die Tätigkeit der Akademie im ersten Jahrzehnt 1920.
— Wissenschaftliche Gesellschaft:
— — Schriften 37; N. F. Heft 1.
— Sternwarte:
— — Veröffentlichungen des Astronomischen Instituts, Bd. 5, Nr. 2.
— Universitätsbibliothek:
— — Schriften 1920.
— — Reden zur Jahresfeier 1919.

Helgoland. Biologische Anstalt:
— — Meeresuntersuchungen, Abt. Kiel 18.

Helsingfors. Finnische Altertumsgesellschaft:
— — Suomen Museo 21—26; Reg. 1894—1913.
— — Protokoll 2. 1915.
— Tidskrift 27. 28. 30. 31.
— — Tallgren: Collection Tovostine 1917.
— Geograf.-föreningen i Finland:
— — Meddelanden 11.
— Finnländische Gesellschaft der Wissenschaften:
— — Öfversigt af förhandlingar 61 A. B; 62 B.
— — Acta 49, 1. 2; 50, 1. 2.
— — Bidrag till kännedom af Finlands natur och folk 78, 4—6; 79, 1—2.
— Finska fortsamfundet:
— — Acta forestalia Fennica 1—12.
— Historische Gesellschaft:
— — Arkisto 25. 26. 28.
— — Historialina Tutkinuksia 1. 2.
— Gesellschaft für finnische Geographie:
— — Fennia 38—41.
— Societas pro fauna et flora Fennica:
— — Acta 46.
— — Meddelanden 45.

Helsingfors. Universitätsbibliothek:
— — Schriften 1920.
— Finnische Litteraturgesellschaft:
— — Suomi 11—17.

Innsbruck. Naturwissenschaftlich-medizinischer Verein:
— — Bericht 37.

Jena. Medizinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft:
— — Jenaische Zeitschrift 56. 2—3.
— Naturwissenschaftliche Wochenschrift:
— — 1920, 9—52, 1921, 1—7.

Johannisburg. Union Observatory:
— — Circular of Union of South Africa 45—49.

Karlsruhe. Technische Hochschule:
— — Schriften 1920.
— Badische Historische Kommission:
— — Bericht über die 34. Plenar-Versammlung.
— — Zeitschrift für die Geschichte des Oberrheins 35.

Kaufbeuren. „Heimat“:
— — Deutsche Gaue 381—420.
— — Sonderheft 109. 111.

Kiel. Naturwissenschaftlicher Verein für Schleswig-Holstein:
— — Schriften 17, 1.

Klagenfurt. Landesmuseum:
— — Carinthia 109 und 110.
— — Jahresbericht 1918.

Königsberg. Physikalisch-ökonomische Gesellschaft:
— — Schriften 59—62.

Kopenhagen. Akademie der Wissenschaften:
— — Oversigt Juni 1918 — Mai 1919.
— — Meddelelser, biologiske 2, 1.
— — Math.-fisiske 1, 13; 15; 2, 4, 6—11.
— — Ørsted, Skrifter 1920.
— Carlsberg-Laboratorium:
— — Comptes rendus des travaux 14, 8—10.
— Botanisk Haves Bibliothek:
— — Arbejder fra den botaniske have 87—93.
— Gesellschaft für nordische Altertumskunde:
— — Aarböger, III. 9.
— — Mémoires 1918/19.

Kopenhagen. — Kommissionen for Havundersøgelser:
— — Skrifter 7–9.
— — Middelelser Fiskeri VI, 1.
— Astronomisches Observatorium:
— — Publikationer og mindre meddelelser 34–36.
— Dänische biologische Station:
— — Report from the Danish biological station 26.

Kuraschiki (Japan). Ohara-Institut:
— — Berichte I, 1–4.

Laibach. Musealverein für Krain:
— — Carniola 9, No. 3 und 4.

Landshut. Historischer Verein:
— — Verhandlungen 55.

La Plata. Universidad Nacional:
— — Contribution à l'estudio de la ciencias, Ser. fisica, Vol. 1, entr. 6.
— — — Ser. tecnica, Vol. 1, entr. 2; Vol. 2, entr. 3.
— — Memoria 9.

Lausanne. Société Vaudoise des sciences naturelles:
— — Bulletin, No. 197 et 198.

Leiden. Maatschappij der Nederlandsche letterkunde:
— — Handlingen 1917/18.
— — Levensberichten 1918/19.
— — Tijdschrift 37 und 38.
— Physikalisches Laboratorium der Universität:
— — Communications, Suppl. 41. 42.
— Mnemosyne:
— — Mnemosyne 47 und 48.
— Museum:
— — Museum, Jg. 27, 5–12; 28, 1–5.
— Sternwarte:
— — Annalen 9, 2; 10, 2 u. 3; 11, 1 u. 2.

Leipzig. Beiblätter zu den Annalen der Physik:
— — 1919 (43), Nr. 21–24.
— Deutsche Bücherei:
— — 7. Bericht 1919.
— Jablonowskische Gesellschaft:
— — Preisschriften 47. 49.
— Gesellschaft der Wissenschaften:
— — Berichte über die Verhandlungen der philol.-hist. Klasse, Bd. 71, 7–10.

Leipzig. Berichte über die Verhandlungen der math.-phys. Klasse. Bd. 71 2—4; 72, 1.
— — Abhandlungen der philol.-hist. Klasse. 36, 4.
— — Abhandlungen der math.-phys. Klasse, 36, 3 u. 4; 37, 1; 38, 1.
Linz. Museum Francisco-Carolinum:
— — Jahresbericht 78.

Lissabon. Société Portugaise des sciences naturelles:
— — Bulletin 6, 3; 7, 1, 2; 8, 1, 2.
— — Memorias 2; 3, 1; 4.

Löwen. Société scientifique de Bruxelles.
— — Annales 39, 1—4; 40, 1.

London. Meteorological Office.
— — Geophysical Journal 1917 und 1918.
— — Yearbook Part 3 sect. 2.
— Geological Society:
— — Quarterly Journal Nr. 361 und 363.

Lund. Botaniska Notiser:
— — Notiser 1920, 1—6; 1921, 1.
— Universität:
— — Acta 15 (Aft. 1 und 2).
— — Årsberättelse 1919/20.
— — Årskrift 20.
— — Bibelforskaren 1919.
— — Skrifter utgiven af humanisk vetenskpssamfundet 1, 2.

Luxemburg. Société des naturalistes Luxemburgeois:
— — Bulletins 11—13.
— Institut Grand-Ducal:
— — Publications de la section historique 59.

Luzern. Historischer Verein der fünf Orte:
— — Geschichtsfreund 73—75.

Madison. Wisconsin Geological and natural history survey.
— — Bulletin, No. 28, 35—37, 42, 44, 57.
— — Soil maps 2—10.

Madrid. R. Academia de sciencias exactas:
— — Programa de premios 1917.
— — Discursos 1916.
— — Annuario 1915—1917.
— — Revista, Vol. 12, 8—12; 13—14; 15, 1—5.
— R. Academia de la historia de España:
— — Boletín 70.

Magdeburg. Museum für Natur- und Heimatkunde.
— — Abhandlungen und Berichte 2, 4; 3, 1 u. 2.

Mannheim. Altertumsverein:
— — Mannheimer Geschichtsblätter, 21. (1920); 22, 1 u. 2.

Mantua. Accademia Virgiliana:
— — Atti e memorie 9—10.

Marburg. Universitätsbibliothek, Institut für das Deutschtum im Ausland:
— — Jahresbericht 1.

Maredsous. Abbaye:
— — Revue bénédictine 32, 38, 1 u. 2.

Meiningen. Henuebergischer altertumsforschender Verein:
— — Neue Beiträge zur Geschichte des deutschen Altertums 29. 30.

Mexiko. Instituto geológico:
— — Boletín 31. 32. 34.
— — Anales 1. 8. 9.
— — Parergones 5, 1—9.
— Sociedad cientifica „Antonio Alzate":
— — Memorias y revista 35, 1—4; 37, 1—3; 38, 1—10.

Middelburg. Seeländische Gesellschaft der Wissenschaften:
— — Archief 1918—1920.
— — Gedenkboek 1769—1919.

Milwaukee. Public Museum:
— — Bulletin of Wisconsin Natural History Society 13, 4.
— — Bulletin of the Public Museum 1, part 3 und 4.
— — Annual report 29.

München. Technische Hochschule:
— — Personalstand 1920/21.
— Landesanstalt für Gewässerkunde:
— — Nr. 1 Heft 1.
— Universitätsbibliothek:
— — Schriften 1920.
— — Personalstand 1919, 1919/20, 1920, 1920/21.
— — Verzeichnis der Vorlesungen, 1919—1920.
— Landeswetterwarte:
— — Übersicht der Witterungsverhältnisse, 1920, 1—12.
— — Ergebnisse der Beobachtungen bayer. Wetterwarten, 1920.
— — Verzeichnis der Veröffentlichungen, 1920.

Münster. Westfälischer Provinzialverein für Wissenschaft und Kunst:
— — Jahresbericht 46—48.

Münster. Verein für Geschichte und Altertumskunde Westfalens:
— — Zeitschrift 77.

Neuburg. Historischer Verein:
— — Neuburger Kollektaneenblatt 84.

Neuchâtel. Bibliothèque de l'Université:
— — Programme des cours, S.-S. 1920.
— Société Neuchâteloise de geographie:
— — Bulletin 28.

New Haven, American Oriental Society.
— — Journal 40, part 5.
— Yale University:
— — Report of the librarian, 1914/15—1915/19.

New York. American Philological Association:
— — Transactions and proceedings 49.
— Botanical garden:
— — Bulletin, Nr. 38 und 39.
— Rockefeller Institute for medical research:
— — Studies 20–30, 32–35.
— American Geographical Society:
— — Geographical Review, Vol. 5, Nr. 6; Vol. 6. 1 u. 2; 7; 8; 9. 1—3.

Nijmwegen. Nederlandsch botanische Vereenigung:
— — Neederlandsch kruidkundig archief 1919.
— — Recueil des travaux botaniques Néerlandais 15; 16, 1 u. 3–4.

Nördlingen. Historischer Verein:
— — Jahrbuch 7.

Nürnberg. Verein für Geschichte der Stadt Nürnberg:
— — Jahresbericht 42.
— — Mitteilung 23.

Osnabrück. Verein für Geschichte und Landeskunde:
— — Mitteilungen 42.

Paderborn. Verein für Geschichte und Altertumskunde Westfalens:
— — Zeitschrift, 77, 2.

Padua. R. Accademia di scienze, lettere ed arti:
— — Atti e memorie 378. 379.
— Academia Veneto-Trentina-Istriana:
— — Atti Anno 9, 10.

Palermo. Circolo matematico:
— — Rendiconti 44, 1 und Suppl. 11, 1.

Parenzo. Società istriana di archeologia e storia patria:
— — Atti e memorie, Vol. 31.

Paris. Comité international des poids et mesures:
— — Procès-verbaux des séances 8.
— „La paix et le droit“:
— — No. 30. 31, 1.
— Société de géographie:
— — La Géographie 30—35, 1.

Philadelphia. College of pharmacy:
— — American journal of pharmacy 89—93, 1.
— Pennsylvania Museum and School of industrial art:
— — Report 44.
— University of Pennsylvania:
— — Bulletin, Vol. 20, No. 10.

Pisa. Società Italiana di fisica:
— — Il nuovo Cimento 66, 2—5 und 9—12; 67, 1.
— Università:
— — Annali 4 und 5.

Portici. Laboratorio di zoologia:
— — Annali 12—14.

Potsdam. Zentralbureau der internationalen Erdmessung:
— — Veröffentlichungen 35. 36.
— Preuß. Geodätisches Institut:
— — Veröffentlichungen 81—83.

Prag. Landesarchiv:
— — Archiv Česky 33.
— Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Böhmen:
— — Beiträge zur deutsch-böhmischen Volkskunde 13. 14.
— — Bibliothek deutscher Schriftsteller 30. 35.
— — Rechenschaftsbericht 1920.
— Sternwarte:
— — Prey, Planetenbildung 1920.
— — Mrazek, Windverhältnisse 1920.
— Universität:
— — Ordnung der Vorlesungen 1920. 1920/21.
— — Personalstand 1919/20.
— Verein für Geschichte der Deutschen in Böhmen:
— — Mitteilungen 58.

Quito. Observatorio:
— — Resumen 1914, 1—6.
— — Informe Anual 1913.

Regensburg. Historischer Verein:
— — Verhandlungen 70.

Riga. Naturforscher-Verein:
— — Korrespondenzblatt 56. 57.

Rio de Janeiro. Museu Nacional:
— — Archivos 20—22.

Rom. Accademia Pontificiana dei nuovi Lincei:
— — Atti 71. 72.
— — Memorie, Ser. II, Vol. 3, 4.
— Deutsches Archäologisches Institut:
— — Mitteilungen 33.
— Società Romana di storia patria:
— — Archivio 43, 1 u. 2.
— Specola Vaticana:
— — Catalogo astrografico 2—4.
— Ufficio Centrale meteorologico:
— — Annali 23, 3; 27, 3; 28, 2, 3; 33, 1; 34, 1; 35, 1; 36, 1.

Rostock. Universitätsbibliothek:
— — Personalverzeichnis 1920 und 1920/21.
— — Vorlesungsverzeichnis 1920—21.
— — Schriften 1920.

Rotterdam. Bataafsch genootschap der proefonderlike wijsbegierde:
— — Catalog van bibliotheek 1917.
— — Verslag der algem. vergadering 1914. 1916. 1919.
— — Gedenkboek 1769—1919.

Salzburg. Gesellschaft für Salzburgische Landeskunde:
— — Mitteilungen 60.

St. Gallen. Naturwissenschaftliche Gesellschaft:
— — Jahrbuch 55.

San Fernando. Instituto y observatorio de marina:
— — Almanaque 1921 und Suppl.

San Francisco. California Academy of sciences:
— — Proceedings 9, 9—15; 10, 1—9.

São Paulo. Museu Paulista:
— Revista 10.
— Sociedade scientifica:
— — Revista 9. 11.

Sarajevo. Landesmuseum:
— — Glasnik 32.

Schleusingen. Hennebergischer Geschichtsverein:
— — Schriften 11. 12.

Schwerin. Verein für mecklenburgische Geschichte und Altertumskunde:
— — Jahrbücher 84.

Sendai. Universität:
— — The Science Reports 4—9; II. S. 2, 1—2; 3, 1—2; 4, 1—3; 5, 1—2.
— — The Technology reports 1, 1—2.
— — The Tohoku Journal of experimental medicine, 1, 1—4.
— — Mitteilungen aus dem pathologischen Institut 1, 1.
— — The Tohoku Mathematical Journal 6—18.

Solothurn. Naturforschende Gesellschaft:
— — Mitteilungen 6.

Spalato. Archäologisches Museum:
— — Bullettino di archeologia e storia Dalmata 36—39.

Stade. Verein für Geschichte und Altertümer der Herzogtümer Bremen und Verden:
— — Stader Archiv 10.

Stockholm. Akademie der Wissenschaften:
— — Arkiv för botanik 15, 3—4.
— — Arkiv för kemi 7, 4—5.
— — Arkiv för zoologie 12, 1—2.
— — Handlingar 58, 1—10; 59, 1—8.
— — Jakttagelser 59.
— Landbruks-Akademien:
— — Handlingar 59.
— Vitterhets och Antikvitets Akademie:
— — Tidskrift 21, 3; 22, 3.
— Bibliothek:
— — Akzessionskatalog 33; Reg. 1906—1915.
— Entomologiska föreningen:
— — Entomologisk Tidskrift 40.
— Geologiska föreningen:
— — Förhandlingar 42; Reg. 32—41.
— Schwedische Gesellschaft für Anthropologie:
— — Ymer 40.
— — Geografisk Annaler 1, 1—4; 2, 1—3.
— Nordiska Museet:
— — Fataburen 1919.
— Reichsarchiv:
— — Meddelanden 1, 48—50.
— — Riksdagets protokoll 15.

Stonyhurst. Observatory:
— — Results 1919.

Straubing. Historischer Verein:
— — Jahresbericht 22.

Stuttgart. Bibliothek:
— — Vierteljahreshefte 28.
— — Fischer, Schwäbisches Wörterbuch 59—62.

Tacubaya. Observatorio astronómico nacional:
— — Anuario 36—41.
— — Catalogo astrofotografico 1.
— — Boletin 1—6.
— — Equinoccio 1920.

Tokyo. Imperial geological Survey of Japan:
— — Bulletin 25, 1—3.
— — Geology of Empire 10, 9; 21, 14; 14, 12; 4, 4; 18, 14; 5, 2.
— — Joban coal field 1.
— Universität:
— — Mitteilungen aus der medizinischen Fakultät 13—16, 1—3; 14—20, 1—4; 21, 1.
— Imperial Earthquake investigation committee:
— — Bulletin 8, 4 u. 5; 9, 2.

Toronto. University:
— — Review of historical publications 19—21, Index 11—20.
— — Physiological Series 24—32.
— — Geological Series 11.
— — Biological Series 15—18.
— — Papers from chemical laboratories 101—110.
— — Papers from physical laboratories 62.
— — Anatomical Series 2. 3.

Tromsö. Museum:
— — Aarshefter 38—40.
— — Aarsberetning 1915—1917.

Turin. R. Accademia delle scienze:
— — Atti 50. 51. 52, 1—8; Reg. 41—50; 55, 1—16.
— — Memorie 65.
— — Osservazioni meteorologiche 1914. 1915.
— Museo di zoologia:
— — Bollettino 30—33.
— Società Piemontese di archeologica:
— — Atti 9, 1—2.
— — Bollettino 3, 1—2.

Upsala. Schwedische Literaturgesellschaft:
— — Skrifter 119—155.
— — Samlaren 40.
— Vetenskaps societeten:
— — Nova Acta 4, 1 u. 2.
— Universitätsbibliothek:
— — Schriften 1918/19 und 1919/20.

Utrecht. Provinciale genootschap van kunsten en wetenschapen:
— — Aantekeningen 1918 und 1919.
— — Verslag 1917—1919.
— Nederlandsch meteorologisch Institut:
— — Annuaire 1915—1918.
— — Mededeelingen en verhandelingen 22—24.
— — Ergebnisse aërologischer Beobachtungen 5—7.
— — Seismische Registrierungen 2—5.
— — Onweders 35—38.
— — Overzicht 17; 18, 1.
— — Publicacion 110.
— Physiologisches Laboratorium der Hochschule:
— — Onderzoekingen VI, 1.

Vaduz. Histor. Verein für das Fürstentum Lichtenstein:
— — Jahrbuch 20.

Vicenza. Accademia Olimpica:
— — Atti, N. S., Vol. 7.

Washington. National Academy of Sciences:
— — Proceedings, Vol. 6, 1—5; 7—11.
— U. S. National Museum:
— — Bulletin 100. 108. 111.
— — Contributions to herbarium 20, 8—9; 22, 1—3; 23, 1.
— — Report 1919.
— U. S. Naval Observatory:
— — Annual Report 1919. 1920.

Weihenstephan. Akademie für Landwirtschaft und Brauerei:
— — Bericht 1919/20.

Weimar. Verlag Böhlau:
— — Zeitschrift der Savignystiftung 41 (3 Abteilungen).

Wien. Akademie:
— — Denkschriften der philol.-histor. Kl., Bd. 61, 3; 63, 2; 64, 1.
— — Denkschriften der math.-naturwiss. Kl. 96.

Wien. Akademie:
— — Sitzungsberichte der philos. Klasse 191, 3, 4; 192, 5; 193, 1—3; 194, 2 u. 4; 195, 2, 3, 5; 196, 2, 5; und Register 18 (171—180).
— — Sitzungsberichte der math.-naturwiss. Klasse, Abt. I 128, 1—10; Abt. IIa 127, 1—9; 128, 3—10; 129, 1 u. 2; Abt. IIb 128, 1—10; Abt. III 127 u. 128.
— — Mitteilungen der Erdbebenkommission, Nr. 55—57.
— Gesellschaft der Ärzte:
— Wiener Klinische Wochenschrift 33 (1920); 34 (1921), 1—8.
— Zoologisch-botanische Gesellschaft:
— — Abhandlungen 11, 1 u. 2.
— — Verhandlungen 66, 6—10; 68, 6—10; 69, 6—10.
— Israelitisch-theologische Lehranstalt:
— — Jahresbericht 27.
— Mechitaristen-Kongregation:
— — Handes Amsorya 1917/18; 1919; 1920; 1921, 1 u. 2.
— Naturhistorisches Museum:
— — Annalen 33.
— Geologische Reichsanstalt:
— — Jahrbuch 67, 3 u. 4; 68, 1—4; 69, 1—4; Gen.-Reg. zu 51—60.
— — Verhandlungen 1918; 1919; 1920, 1—6.
— Universität:
— — Bericht über die volkstümlichen Universitätsvorträge 1916/17.
— — Inauguration des Rektors 1918/19 1920/21.
— — Übersicht der Behörden 1918/19—1920/21.
— — Vorlesungen, S.-S. 1918 — W.-S. 1920/21.
— Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik:
— — Jahrbücher 52.

Winterthur. Naturwissenschaftliche Gesellschaft:
— — Mitteilungen 13.

Wolfenbüttel. Geschichtsverein für das Herzogtum Braunschweig:
Quellen und Forschungen 6 und 8.

Würzburg. Physikalisch-medizinische Gesellschaft:
— — Sitzungsberichte 1919, 1—7; 1920, 1 und 2.
— — Verhandlungen 46, 1.
— Universität:
— — Verzeichnis der Vorlesungen, S.-S. 1920 und W.-S. 1921.
— Historischer Verein für Unterfranken:
— — Archiv 61.
— — Jahresbericht 1918.

*

Zürich. Antiquarische Gesellschaft:
— — Mitteilungen, Bd. 28 Heft 5, Bd. 29 Heft 1.
— Naturforschende Gesellschaft:
— — Neujahrsblatt 121—123.
— — Vierteljahresschrift 65.
— Schweizerische Geologische Kommission:
— — Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz, 47, I u. II.
— Schweizerisches Landesmuseum:
— — Anzeiger für Schweizerische Altertumskunde 20, 4; 21, 4; 22, 1—4.
— — Jahresbericht 28.
— Polytechnikum:
— — Dissertationen 1920.
— — Programm S.-S. 1920; W.-S. 1920/21.
— Sternwarte:
— — Astronomische Mitteilungen 108.
— Universitätsbibliothek:
— — Schriften 1919.
— Schweizerische meteorologische Zentralanstalt:
— — Annalen 55.
Zweibrücken. Gymnasium:
— — Jahresbericht 1918/19.

Geschenke von Privatpersonen, Geschäftsfirmen und Redaktionen:

Athen, *Νέος Ἑλληνομνήμων*:
— Bd. 13, 1 u. 2; 14, 2 u. 3.
Balch, Ch. W.: Arbitration as a term of international law. Philad. 1920.
Bezold Karl in Heidelberg:
— Zeitschrift für Assyriologie, Bd. XXXIII, Heft 1—2.
Bloomfield, M.: Rig-Veda repetitions. Harvard 1916.
Brandstetter, R.: Architektonische Sprachverwandtschaft 1920.
Ganguli: Lectures on the theory of plane curves. 2 Bde. Calcutta 1919.
Hillebrandt, Alfr.: Kalidasa. Breslau 1921.
Kirfel: Kosmographie der Inder. Bonn 1920.
Martellotta, Grammaticas de Latinulas Linguas. Bari 1919.
Mayer, Alois: Enge des Bewußtseins. Stuttgart 1920.
Meißner, Bruno: Babylonien und Assyrien I. Heidelberg 1920.
Mullin, E.: Impulso e creacion. Montevideo 1919.
Ponte, Andr. F.: Bolivar. Caracas 1919.
Prosper, Ed. R.: Las estepas de España. Madrid 1920.
Zeiler, A.: Einkommensabgaben und Gerichtshof für bindende Gesetzauslegung.
Zerbos: Geschichte der Medizin. Bd. 1. Athen 1914.

Neuberechnung des südlichen Netzteiles der bayerischen Landestriangulierung zwischen der Donau und der Nordkette der Alpen.

Von **M. Schmidt.**

Vorgelegt in der Sitzung am 10. Januar 1920.

In der Sitzung der mathematisch-physikalischen Klasse vom 10. Januar bringt Professor M. Schmidt eine von ihm veranlaßte umfangreiche Rechenarbeit des Assistenten am geodätischen Institut der Technischen Hochschule, Dr. Ing. Adolf Schlötzer in Vorlage, welche eine Neuberechnung des südlichen Teiles des bayerischen Hauptdreiecksnetzes zwischen der Donau und der Nordkette der Alpen zum Gegenstand hat und in ihren Ergebnissen einen Beitrag zum Nachweis der bei gruppenweiser Ausgleichung umfangreicher Dreiecksnetze auftretenden sogenannten Netzverschiebungsfehler liefert.

Die Fehlerausgleichung des 121 Hauptdreieckspunkte umfassenden Netzes der bayerischen Landesvermessung ist ursprünglich durch Soldner nach einem als Tatonieren bezeichneten empirischen Verfahren vorgenommen worden, bei welchem die beobachteten Winkel derart verbessert wurden, daß zwar die bestehenden geometrischen Netzbedingungen erfüllt sind, nicht aber zugleich die kleinstmöglichen Werte dieser Verbesserungen erhalten werden.

Gelegentlich der Veröffentlichung der Ergebnisse der Landesvermessung im Jahre 1873 hat der Bearbeiter dieses großen, im amtlichen Auftrag herausgegebenen Werkes eine systematische Ausgleichung der Winkelmessungen nach bedingten Beobachtungen ausführen lassen, wobei die große Zahl der be-

stehenden Bedingungsgleichungen — es waren gegen 1000 Stationswinkelbedingungen und 651 Netzwinkel- und Seitengleichungen zu erfüllen — bei gleichzeitiger Auflösung eine kaum zu bewältigende Rechenarbeit verursacht hätte.

Der Bearbeiter dieses Werkes, Oberst Carl von Orff, sah sich deshalb veranlaßt die Ausgleichung des Netzes in 32 Einzelgruppen von Dreiecken vorzunehmen, welche unter sich durch Anschlußbedingungen verbunden sind.

Hiedurch war eine Fehlerübertragung von einer Gruppe zur anderen bedingt und die Möglichkeit von Punktverschiebungen für ganze Netzteile gegeben.

Bei den in den letzten Jahren durch den Berichterstatter ausgeführten Untersuchungen über die im Laufe der Zeit etwa eingetretenen tektonischen Höhen- und Lageänderungen von festen Messungspunkten im südbayerischen Voralpengebiet war es von Wichtigkeit festzustellen, ob die bei einigen diesem Gebiete angehörenden Netzpunkten auftretenden Lageänderungen sich nicht als durch die Rechnung entstandene Netzfehler erklären lassen könnten.

Ein sicheres Urteil hierüber war nur dadurch zu gewinnen, daß man die bei der Berechnung der Landesvermessung durch die gruppenweise ausgeführte Netzausgleichung gefundenen Koordinaten mit den aus einer neu auszuführenden Gesamtausgleichung des Netzes ermittelten Koordinatenwerten in Vergleich brachte, wobei natürlich beiden Ausgleichungen die gleichen Ausgangswinkelwerte und Gewichte, sowie dieselbe Basislänge und Orientierung zugrunde gelegt werden mußte.

Diese Aufgabe hat Dr. Schlötzer, wenn auch nicht für das ganze Hauptdreiecksnetz, so doch für den südlich der Donau gelegenen Teil gelöst und den Nachweis erbracht, daß in der Tat durch die gruppenweise Netzausgleichung Punktverschiebungen von bemerkenswerter Größe entstanden sind.

Die Zahl der dieser Untersuchung unterzogenen Hauptnetzpunkte beträgt 42. Von diesen sind indessen die beiden Endpunkte der oberbayerischen Grundlinie München—Aufkirchen als unveränderte Ausgangspunkte angenommen worden,

sodaß nur für die noch übrigen 40 Punkte die Neuberechnung der Koordinaten vorzunehmen war.

Hiebei sind die Koordinaten der Landesvermessung als Näherungswerte eingeführt und unter Verwendung der aus den früheren Stationsausgleichungen hervorgegangenen Winkel die wahrscheinlichsten Werte jener Koordinatenverbesserungen berechnet worden, welche sich durch die sogenannte Koordinatenausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate ergeben.

Für die Näherungskoordinaten der ausgewählten 40 Hauptnetzpunkte sind sodann $2 \times 40 = 80$ Koordinatenverbesserungen dx und dy derart berechnet worden, daß die aus 274 Fehlergleichungen folgenden Richtungsverbesserungen der sie verbindenden Netzlinien der Bedingung der kleinsten Quadratsumme genügen und sich zugleich eine widerspruchsfreie gegenseitige Orientierung dieser Linien ergibt.

Zu diesem Zweck waren aus 120 Bedingungsgleichungen ebensoviele Unbekannte im Zusammenhang zu berechnen. Von diesen Gleichungen konnten indessen 40 zur Berechnung der Orientierungsverbesserungen der Netzlinien dienende Gleichungen abgetrennt und für sich behandelt werden, während die übrigen 80 Gleichungen zur Berechnung der 80 Koordinatenverbesserungen dx und dy dienten.

Die Auflösung dieses Systems von 80 Gleichungen mit ebensovielen Unbekannten nach dem Gaußschen Algorithmus hat eine sehr umfangreiche Rechenarbeit erfordert. Zur Reduktion des Gleichungssystems war die Bildung von 60330 Koeffizienten-Produkten vorzunehmen und zur Auflösung der sich ergebenden 80 reduzierten Normalgleichungen die Berechnung von 2874, meist 6 und 7 zifferigen Zahlenkoeffizienten und von 80 Absolutgliedern mit der gleichen Stellenzahl auszuführen.

Die Auflösung wurde doppelt, unabhängig und gleichzeitig von zwei aus einem Rechner und einem Aufschreiber bestehenden Rechengruppen mit Rechenmaschinen vom System „Brunsviga“ im Laufe des vergangenen Jahres ausgeführt.

Die Zahl der hiezu nötigen Kurbeldrehungen der Maschinen ist auf mehr als zweieinhalb Millionen zu schätzen.

Die aus der Ausgleichung folgenden Abszissen- und Ordinatenverbesserungen sind in der nachstehenden Tabelle zusammengestellt und haben Werte bis zum Betrag von $dy = -0{,}787$ m bei der Pyramide von Braunau am Inn und $dx = -0{,}844$ m bei dem Signal Rohr erreicht.

Tabelle 1.

Aus der Netzausgleichung hervorgegangene Koordinatenverbesserungen.

Station	Verbesserung in m	Station	Verbesserung in m
Schweitenkirchen T.	$dy_3 = -0{,}104$ $dx_3 = -0{,}123$	Haunsberg P.	$dy_{13} = -0{,}690$ $dx_{13} = -0{,}398$
Attenhausen T.	$dy_4 = +0{,}290$ $dx_4 = -0{,}104$	Hohenstaufen Sig.	$dy_{14} = -0{,}460$ $dx_{14} = -0{,}506$
Dreifaltigkeit T.	$dy_5 = -0{,}344$ $dx_5 = -0{,}576$	Watzmann Sig.	$dy_{15} = -0{,}421$ $dx_{15} = -0{,}633$
Haid T.	$dy_6 = -0{,}173$ $dx_6 = -0{,}686$	Hochgern Sig.	$dy_{16} = -0{,}266$ $dx_{16} = -0{,}423$
Johannsbrunn T.	$dy_7 = -0{,}005$ $dx_7 = +0{,}102$	Wendelstein P.	$dy_{17} = -0{,}088$ $dx_{17} = -0{,}275$
Mitbach T.	$dy_8 = +0{,}006$ $dx_8 = +0{,}040$	Rettenstein P.	$dy_{18} = +0{,}012$ $dx_{18} = -0{,}164$
Braunau P.	$dy_9 = -0{,}787$ $dx_9 = +0{,}288$	Rofan P.	$dy_{19} = -0{,}131$ $dx_{19} = -0{,}151$
Schnaitsee T.	$dy_{10} = -0{,}181$ $dx_{10} = -0{,}006$	Edkor P.	$dy_{20} = -0{,}374$ $dx_{20} = -0{,}169$
Asten T.	$dy_{11} = -0{,}478$ $dx_{11} = +0{,}014$	Benediktenwand S.	$dy_{21} = -0{,}204$ $dx_{21} = -0{,}412$
Oberweißenk. T.	$dy_{12} = -0{,}421$ $dx_{12} = -0{,}093$	Hochplatte P.	$dy_{22} = +0{,}161$ $dx_{22} = -0{,}381$

Station	Verbesserung in m	Station	Verbesserung in m
Grünten P.	$dy_{23} = +0{,}052$ $dx_{23} = -0.299$	Castlberg Sig.	$dy_{33} = -0{,}223$ $dx_{33} = -0{,}333$
Edelsberg P.	$dy_{24} = +0{,}042$ $dx_{24} = -0.217$	Rohr Sig.	$dy_{34} = +0{,}073$ $dx_{34} = -0.844$
Änger P.	$dy_{25} = +0{,}238$ $dx_{25} = +0{,}074$	Altomünster T.	$dy_{35} = -0{,}089$ $dx_{35} = -0{,}115$
Kronburg T.	$dy_{26} = +0{,}157$ $dx_{26} = +0{,}227$	Günzelhofen T.	$dy_{36} = -0{,}171$ $dx_{36} = +0{,}146$
Schönegg P.	$dy_{27} = -0{,}115$ $dx_{27} = +0{,}382$	Georgenberg T.	$dy_{37} = -0{,}023$ $dx_{37} = -0{,}214$
Roggenburg s. T.	$dy_{28} = -0{,}202$ $dx_{28} = +0{,}125$	Eschers P.	$dy_{38} = +0{,}051$ $dx_{38} = +0{,}029$
Kirchheim T.	$dy_{29} = +0{,}044$ $dx_{29} = +0{,}178$	Hauptmannsgreith P.	$dy_{39} = +0{,}018$ $dx_{39} = -0{,}102$
Klimach T.	$dy_{30} = -0{,}119$ $dx_{30} = +0{,}126$	Auerberg T.	$dy_{40} = +0{,}158$ $dx_{40} = -0.180$
Stauffersberg P.	$dy_{31} = -0{,}184$ $dx_{31} = -0.016$	Wehringen P.	$dy_{41} = -0{,}189$ $dx_{41} = +0{,}074$
Pöttmes P.	$dy_{32} = -0{,}009$ $dx_{32} = -0{,}221$	Peißenberg T.	$dy_{42} = +0.126$ $dx_{42} = -0{,}219$

Die Werte mit gleichem Vorzeichen zeigen eine ins Auge fallende Gruppierung. Sie finden sich besonders im südöstlichen Netzteile gehäuft und lassen hier einseitige Punktverschiebungen deutlich erkennen, die durch ungünstige Fehleranhäufung in der älteren Ausgleichung ihre Erklärung finden.

Im Laufe der Zeit eingetretene Lageänderungen der Netzpunkte in der Natur kommen hier nicht in Betracht, da die ältere und die neuere Ausgleichung dieselben Winkelbeobachtungen zur gemeinsamen Grundlage haben. Hinsichtlich der Größe der gefundenen Koordinatenänderungen ist noch zu bemerken, daß die von den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern

bedingte Unsicherheit der Koordinaten- und der Lagebestimmung der Netzpunkte nach der Größe der mittleren Fehler beurteilt werden muß, welche sich aus den mittleren Richtungsfehlern der die Lage der Punkte bedingenden Schnittstrahlen berechnen lassen.

Die Neuausgleichung ergibt mittlere Richtungs- und Winkelfehler von $\pm 1''28$ bzw. $\pm 1''80$ gegenüber den analogen Werten der Landesvermessung $\pm 1''52$ und $\pm 2''14$, während nach der internationalen Formel aus 337 Dreiecksschlußfehlern der Landesvermessung der mittleren Winkelfehler $\pm 1''77$ wird. Diese gute Übereinstimmung des mittleren Winkelfehlers der Neuausgleichung des südlichen Netzteiles mit dem Fehler des Gesamtnetzes beweist auch die Gleichwertigkeit der im südlichen Netzteil mit Multiplikationskreisen von Borda, im übrigen Netz aber größtenteils mit Reichenbachschen Repetitionstheodoliten ausgeführten Winkelmessungen.

Die mittleren Fehler der berechneten Koordinaten sind für die Netzpunkte der Landesvermessung ursprünglich nicht ermittelt worden. Da dieselben indessen von großer Bedeutung sind, so sind sie für den neuausgeglichenen Netzteil bestimmt worden. Die Berechnung erfolgte aus den mittleren Richtungsfehlern der Schnittstrahlen durch Auflösen der sogenannten Gewichtsgleichungen. Die vollständige Ausrechnung der hiezu nötigen 80 Gleichungssysteme würde die Bildung von ungefähr 330 000 Koeffizientenprodukten erfordert haben.

Um diese Rechenarbeit auf ein erträgliches Maß einzuschränken, ist die Rechnung vorerst nur für 16 Netzpunkte durchgeführt worden und hat durchschnittliche Fehlerwerte von $m_x = \pm 0{,}29$ m und $m_y = \pm 0{,}39$ m ergeben.

Die nachstehenden Werte dürften genügen, um die Unsicherheit der ursprünglichen Lagebestimmung der Dreieckspunkte der Landesvermessung zu beurteilen, wenn es sich darum handelt, bei einer Neutriangulierung etwaige Lageänderungen dieser Punkte durch inzwischen eingetretene tektonische Schollenbewegungen der Erdkruste festzustellen.

Tabelle 2.

Aus der Auflösung der Gewichtsgleichungen folgende mittlere Koordinatenfehler.

Station	mittl. Koordinatenfehler in x	mittl. Koordinatenfehler in y	Station	mittl. Koordinatenfehler in x	mittl. Koordinatenfehler in y
	m	m		m	m
Peißenberg . . .	± 0,29	± 0,29	Rohr	± 0,40	± 0,26
Wehringen . . .	± 0,21	± 0,39	Castlberg . . .	± 0,29	± 0,18
Auerberg	± 0,35	± 0,41	Pöttmes	± 0,29	± 0,31
Hauptmannsgreith	± 0,39	± 0,54	Stauffersberg .	± 0,26	± 0,42
Eschers	± 0,36	± 0,57	Klimach	± 0,23	± 0,41
Georgenberg . .	± 0,30	± 0,42	Kirchheim . . .	± 0,26	± 0,51
Günzelhofen . .	± 0,14	± 0,21	Roggenburg . .	± 0,32	± 0,62
Altomünster . .	± 0,18	± 0,18	Schönegg . . .	± 0,35	± 0,60
			Mittelwerte	**± 0,29** $= m_x$	**± 0,39** $= m_y$

Bemerkungen über die ältesten bekannten Wirbeltier-Reste.

Von **Ernst Stromer.**

Vorgetragen in der Sitzung am 10. Januar 1920.

Über die ursprünglichen Wirbeltiere sind sich völlig widersprechende Ansichten geäußert worden. Die herrschende ist, daß es marine, den Knorpelfischen ähnliche Tiere waren, wie es unter den Paläontologen z. B. Kemna 1904, Smith Woodward (1906) und Deecke (1913) annehmen. Im schroffsten Gegensatz dazu steht die Hypothese von Simroth (1891, S. 340 ff.), der sich der Paläontologe Jäkel zuerst (1896, S. 123—126) zwar noch nicht ganz, neuerdings (1911, S. 10/11 und 27/28) aber in allem Wesentlichen anschloß, daß es lungenatmende Landbewohner waren, aus welchen am Boden von Süßwasser- und Küstengewässern lebende Wasserbewohner sich entwickelten, so daß jedenfalls die frei schwimmenden Fische etwas Sekundäres wären. Gewissermaßen als Kuriosum ist auch die Ansicht Pattens (1902) und Steinmanns (1908) zu erwähnen, wonach die ältesten Wirbeltiere, die Placodermi, Übergangsformen von wasserbewohnenden Arthropoden (Merostomata oder Trilobita) zu Fischen seien. Diese merkwürdigen Formen, deren Bau und Stellung heute noch keineswegs klar ist, gaben aber auch noch zu weiteren sich völlig widersprechenden Ansichten Anlaß, indem z. B. Traquair (1898, S. 843 ff.) und Goodrich (1909, S. 66) der herrschenden Meinung entsprechend ihre Hautpanzerplatten durch Verschmelzung von Plakoidschüppchen entstanden sein lassen, während Jäkel (1911, S. 26) umgekehrt einen Zerfall solcher Platten in kleine Hautskelett-Teile annimmt.

Angesichts solcher Widersprüche und so gewagter Theorien lohnt es sich wohl, einmal kurz das Tatsachenmaterial zu prüfen. Ich kann mich dabei nicht nur auf Literatur stützen, sondern auch auf relativ gutes Material der hiesigen paläontologischen Sammlung, dessen Untersuchung mir in bereitwilligster Weise gestattet wurde.

Die ältesten Wirbeltier-Reste kennt man aus dem Untersilur und zwar in Europa aus dem Glaukonitsande von St. Petersburg. Von dort beschrieb nämlich Rohon (1889) winzige kegelförmige Zähnchen aus gewöhnlichem Dentin mit Schmelz ohne Wurzeln (Palaeodus und Archodus), die ihrer Form nach nicht von Elasmobranchiern stammen. Aus Nordamerika beschrieb dann Walcott aus dem Harding-Sandstein von Canyon City in Colorado Bruchstücke von Hautpanzerplatten, in welchen Jäkel (in Walcott 1892) echtes Dentin, Vaillant (1902) unzweifelhafte Knochenkörperchen nachweisen konnte (Astraspis und Eriptychius) und welche zu Placodermi und Crossopterygii gerechnet wurden. Außerdem beschrieb Walcott von dort eigentümliche Gebilde (Dictyorhabdus), die er für Chorda-Scheiden von Chimaeridae erklärte. Ich konnte an hiesigem ausreichendem Materiale diese Befunde nachprüfen und kann daraufhin feststellen, daß es sich bei Dictyorhabdus sicher nicht um ein inneres Organ und einen Wirbeltier-Rest handelt, weil die dünne, aber unbiegsame Schale außen eine feine Gitterskulptur zeigt und nicht aus phosphorsaurem, sondern aus kohlensaurem Kalk besteht, an dem sich in Dünnschliffen außer deutlicher Schichtung keine feine Struktur nachweisen läßt. Bezüglich der andern Bruchstücke aber kann ich die Befunde von Walcott und Jäkel nur bestätigen und kann auch gegen die systematische Einreihung nichts Wesentliches einwenden, nur scheint sie mir auf Grund so kleiner Bruchstücke nicht gesichert.

Jäkel (1895, I, S. 162) und Frech (1897, S. 82/83, 232 und 252) bezweifelten aber das untersilurische Alter des Sandsteines von Canyon City, betonten die Ähnlichkeit ihrer unzweifelhaften Wirbeltier-Reste mit devonischen und des Ge-

steines selbst mit devonischem Oldred-Sandstein, und sehr auffällig ist, daß weder Walcott seine angekündigte genaue Beschreibung der Reste erscheinen ließ noch einer der zahlreichen Wirbeltier-Paläontologen Nordamerikas diese doch schon durch ihr hohes Alter sehr wichtigen Fossilien genauer untersucht zu haben scheint. Daß es sich aber doch um Untersilur (Trentonstufe) handelt, dafür kann als Wahrscheinlichkeits-Beweis angeführt werden, daß Darton (1906, S. 29) in einem unzweifelhaft untersilurischen Sandstein an der Basis des Bighorn-Kalkes der Bighorn-Berge in Wyoming zahlreiche Reste fand, die Walcott mit den Astraspis und Eriptychius-Resten von Canyon City identifizierte, die allerdings noch nicht beschrieben zu sein scheinen; auch scheinen amerikanische Geologen an dem untersilurischen Alter beider Sandsteine nicht zu zweifeln.

Die nächst ältesten Reste von Wirbeltieren kennt man in weitem zeitlichen Abstande aus dem Obersilur, hier aber in viel größerer Vollständigkeit, in stärkerer Mannigfaltigkeit und von viel zahlreicheren Fundorten. Ctenopleuron F. Matthew (1907) von St. John in Neu-Braunschweig allerdings ist meiner Meinung nach ein nicht näher bestimmbares Fossil und die Acanthodi sind zwar schon sehr lange durch isolierte Flossenstacheln (Onchus) vor allem in Ludlow in England bekannt, aber leider immer noch nicht in Resten, mit denen sich etwas anfangen läßt. Dagegen sind einige Osteostraci und eine ziemliche Zahl von Heterostraci, also Ostracodermi, von Schottland und der Insel Ösel, letztere auch aus zahlreichen andern Fundorten Europas und Nordamerikas in verhältnismäßig guten Resten beschrieben[1]). Ich will mich auf Grund von Literaturstudien und Untersuchung der wenigen hiesigen Reste solcher Formen über diese schon so vielfach behandelten und so verschieden beurteilten Formen nicht weiter verbreiten, aber ich muß doch etwas über die Anaspida sagen, deren Reste man bisher nur aus dem Obersilur von Schottland und Kristiania kennt, von letzterem Fundorte leider nur in einer vorläufigen

[1]) Literatur darüber siehe besonders Traquair 1898, S. 860—62.

Mitteilung (Traquair 1898, 1905 und Kiaer 1911). Im Gegensatz zu der gebräuchlichen Auffassung, die neuestens auch Abel (1919, S. 65 ff.) bringt, möchte ich wie Jäkel (1911, S. 37) oben und unten vertauschen, denn die vermutlichen Kiemenlöcher bei Birkenia und Lasanius liegen bei jener Auffassung dorsal und, was Abel bei Birkenia für eine Orbita hält, viel zu weit ventral[1]) und außerdem scheint mir auf Tafel 40 in Traquair 1905, Fig. 7 deutlich, Fig. 5 schwach die Reste von unteren und oberen wohl nur knorpeligen und verkohlt erhaltenen Wirbelbögen zu zeigen, während in Fig. 6 vielleicht Träger einer Analflosse angedeutet sind. Allerdings würde bei einer solchen Auffassung die Schwanzflosse im Gegensatz zu der aller Fische wie bei Ichthyosaurus eine ausgesprochen hypobatische sein. Die bei einem hiesigen Exemplar von Lasanius sehr scharf abgedrückten 8 Spangen hinter der Kopfregion würde ich für Kiemenspangen halten, die auffälliger Weise fest verknöchert waren.

Aus dem Unterdevon kennt man endlich eine viel reichere und besser erhaltene Fauna von Osteostraci, Heterostraci, Antiarchi, Arthrodira, Acanthodi, Dipnoi und Crossopterygii. Unzweifelhafte Elasmobranchii (Cladoselachii) sind aber merkwürdiger Weise nur durch wenige Zähnchen von Campbellton in Neu-Braunschweig bekannt, die meisten Wirbeltier-Reste nur aus der Oldred-Fazies Europas und Nordamerikas und nur selten aus marinen Seichtwasserschichten Europas. Erst im Mitteldevon (Oldred) Europas findet sich ein ältester Angehöriger der Heterocerci und erst im oberen Devon eine reichere Marinfauna besonders von Arthrodira.

Was nun das Vorkommen der ältesten bekannten Wirbeltiere anlangt, so ergibt sich Folgendes. Der Stamm der Wirbeltiere ist uns zwar später bekannt als die andern

[1]) Befremdlicher Weise vermutet Abel (1919, S. 68/69) in einem Flecken vor dieser? Orbita ein Spiraculum wie bei Elasmobranchii; dieses müßte doch hinter ihr liegen. Es ist auch irrig, wenn Abel (1919, S. 67, 68) von ventralen Hautlappen spricht, denn nach den scharfen Abdrücken handelt es sich zweifellos bei Birkenia wie bei Lasanius um fest verkalkte Gebilde, also um Stachelschuppen.

größeren Tierstämme, aber es geht nicht an, wie Jäkel (1906) von oberdevonischen Resten als ältesten zu sprechen, denn im Unterdevon und Obersilur sind die Wirbeltiere schon sehr mannigfaltig und weit verbreitet und auch im Untersilur schon so vertreten, daß selbst diese ältesten bekannten sicher noch ältere Vorläufer haben mußten.

Aus dem Kambrium und Silur kennt man keine sicheren Binnenablagerungen und aus dem marinen Kambrium keine, aus dem so gut durchforschten marinen Silur und Unterdevon auffällig wenig Wirbeltier-Reste. Jäkel (1911, S. 26) und ausführlicher Pompeckj (1913, S. 1146) erklären diese Tatsache damit, daß die ältesten bekannten Wirbeltiere Süßwasserbewohner waren und nur gelegentlich in Küstenablagerungen eingeschwemmt wurden. In der Tat kann man die silurischen und unterdevonischen Schichten, in denen ihre Reste am besten erhalten und am häufigsten vorkommen, aus mehreren Gründen für Binnenablagerungen ansehen, während in zweifellos marinen Seichtwasser-Ablagerungen dieser Zeit nur Bruchstücke von Wirbeltieren bekannt sind. Diese Betrachtung gilt aber nur von den weitaus vorherrschenden Formen mit starkem Hautskelett, das wohl erhaltungsfähig und leicht zu finden ist. Das Innenskelett all der ältesten Wirbeltiere ist jedoch nicht oder nur sehr wenig verkalkt und allermeist sind Zähne nicht vorhanden. Gegenwärtig sind nun öfters nahe Verwandte stark gepanzerter Formen nackt, z. B. manche Welse gegenüber den Panzerwelsen; war es damals ebenso, so sind die Funde der äußerst dürftigen und kaum erhaltungsfähigen Reste solcher nackter und zahnloser Formen nur günstigem Zufall zu danken (Stromer 1912, S. 37). Nackte oder nur mit winzigen Plakoidschuppen versehene Wirbeltiere ohne Zähne oder nur mit sehr kleinen Zähnchen und mit unverkalktem Innenskelett, also Thelodus ähnliche oder Palaeodus artige Tiere könnten also im marinen Silur und Kambrium nur unserer Aufmerksamkeit entgangen sein, denn solche Reste, wie die winzigen von Rohon (1889) beschriebenen untersilurischen Zähne werden nur bei sehr sorgfältigem Suchen gefunden.

Was den Bau der bekannten ältesten Wirbeltiere anlangt, so will ich nur einiges hier erörtern. Wie oben erwähnt, haben sie alle ein kaum oder nicht verkalktes Innenskelett und der Mangel von Funden dürfte kaum anders zu erklären sein als daß dies für sämtliche älteste Wirbeltiere gilt. Das sogenannte primäre Knochenskelett ist also jedenfalls phylogenetisch jünger als die Hautknochen. Die uns bekannten ältesten Wirbeltiere haben nämlich fast alle ein ungewöhnlich starkes, verkalktes Hautskelett mit großen Platten[1]) oder wie die Anaspida, Thelodus und die Acanthodi ein sehr dichtes oder doch einige stärkere verkalkte Hautskelett-Teile. Jäkel (1911, S. 26) nimmt nun an, daß die großen Hautskelett-Platten im Laufe der Entwicklung in kleine Teile zerfallen wären; er brachte aber keinerlei positiven Beweis für diese den herrschenden Anschauungen widersprechende Ansicht, denn von der Aufstellung von Stammbäumen ist noch kaum die Rede und die oben erörterte Wahrscheinlichkeit, daß die ältesten Formen mit schwachem Hautskelett nicht erhalten oder noch nicht gefunden sind, wurde von ihm nicht beachtet. Umgekehrt vermag ich aber auch die von Traquair (1898, S. 843 ff., 1900, S. 465 ff.), Goodrich (1909, S. 195/196) und Kiaer (1911, S. 16) besonders für Heterostraci aufgestellte Entwicklungsreihe von fein zu großplattig gepanzerten Formen nicht als streng beweisend anzuerkennen, denn es fehlt der Nachweis der geologischen Altersfolge. Jedenfalls ist ja zu betonen, daß schon im Obersilur Wirbeltiere mit so großen Panzerplatten wie Pteraspis und Trematapis vorkommen und daß Panzerplatten auch in Schichten gefunden sind, die höchst wahrscheinlich untersilurisch sind. Vom Standpunkte des Paläontologen aus ist also diese Frage noch nicht einwandfrei zu lösen, denn für ihn genügt keineswegs der Nachweis von Formenreihen, sondern er muß als wesentlich die gesetzmäßige Altersfolge der Formen feststellen.

Sehr auffällig ist die Seltenheit normaler Zähne aus Pulpo-

[1]) Über deren Struktur siehe u. a. Gebhardt 1907.

dentin, obgleich Rohon (1889) solche schon im Untersilur nachgewiesen hat, und von Haifischzähnen (Revolvergebiß) im Silur (? Monopleurodus Pander) und Unterdevon. In letzterem sind zwar bezahnte Formen häufig (Crossopterygii, Dipnoi, Acanthodi, auch wenige Cladoselachii und Heterocerci), aber bei den Kegelzähnen der Crossopterygii herrscht die eigentümliche Labyrinthstruktur vor, die sich derartig erst wieder bei gewissen Stegocephali im Karbon bis zur Trias wiederfindet, und bei den Dipnoi sind sie zu fächerförmig gestellten Kämmen verschmolzen[1]).

Andere Formen (Arthrodira) haben nur zahnartig gezackte Kieferränder aus Knochensubstanz, die man nicht wie Jäkel (1919) mit echten Dentinzähnen von Sphenodon usw. gleichstellen darf.[2]) Die vorherrschenden ältesten Wirbeltiere sind ganz zahnlos (Anaspida, Heterostraci, Osteostraci, Antiarchi), ja sogar kieferlos, so daß Jäkel (1919) für sie das Vorhandensein eines Saugmundes ähnlich dem der rezenten Cyclostomata und Amphibienlarven annimmt. Für Formen mit ausgesprochen quer gestreckter Mundspalte vorn im Panzer wie Drepanaspis, Pteraspis, Trematapis und die Antiarchi erscheint aber eine derartige Annahme sehr gewagt. Jedenfalls spricht das sehr verschiedene Verhalten in der Ausbildung des Mundes, der Kiefer und der Bezahnung bei den unterdevonischen Wirbeltieren dafür, daß eine lange, mannigfaltige Entwicklung großenteils gut erhaltungsfähiger Teile vorangegangen sein muß.

---

[1]) Daß es sich hier um eine Konkreszenz von Kegelzähnchen aus Trabekulardentin handelt, dafür hat Peyer (1917, S. 35 ff.) neuerdings Wahrscheinlichkeitsgründe beigebracht.

[2]) Ihre Unterkiefer sollen nach Jäckel (1919) im Wesentlichen den Splenialia der normalen niederen Wirbeltiere entsprechen. Das wäre insofern nichts ganz Besonderes, als auch bei den jetzt lebenden Lepidosirenidae der verknöcherte Unterkiefer fast nur aus den Splenialia besteht. Der von Jäkel (a. a. O., Fig. 9, S. 84—86) beschriebene Erromenosteus spricht aber eher dafür, daß es Dentalia sind, da hier zwischen und vor ihnen Stücke in anscheinend normaler Lage erhalten sind, die wohl den Splenialia und einem unpaaren Praedentale entsprechen, die allerdings Jäkel seltsamer Weise als Hyoidea deutet.

Da sie uns so gut wie unbekannt ist, liegt nahe, anzunehmen, daß sie mindestens in der Hauptsache in prädevonischen Binnengewässern statthatte, deren Ablagerungen wir noch nicht gefunden haben.

Bei den Arthrodira und Antiarchi ist der Panzer des Kopfes und Vorderrumpfes durch eigenartige seitliche Gelenke verbunden, die Jäkel (1919, S. 96 ff.) mit dem Akt des Mundöffnens in Beziehung bringt. Mir scheint aber erstlich der Umstand, daß man bei den Arthrodira fast niemals ein Unterkiefergelenk fand, nur zu beweisen, daß es wohl wie bei den jetzt lebenden Lepidosirenidae aus unverkalktem Knorpel bestand. Jene Panzergelenke aber ermöglichten den Boden bewohnenden Formen wohl nur ein Heben des Kopfes, ähnlich wie die Boden bewohnenden Rochen im Gegensatz zu den frei schwimmenden Fischen ein bewegliches Hinterhauptsgelenk zu dem gleichen Zwecke besitzen.

Daß die uns bekannten ältesten Wirbeltiere schlechte Schwimmer und Bodenbewohner waren, wird fast allgemein hervorgehoben (Jäkel 1896, 1911, Dollo 1910, S. 390—400, Stromer 1912, S. 45/46, Pompeckj 1913, S. 1147). Ihre Gesamtform und die Lage und Ausbildung vieler Organe spricht ja entschieden dafür, wenn auch bei manchen Rekonstruktionen, z. B. von Drepanaspis, nicht beachtet ist, daß die Reste ganz platt gedrückt erhalten sind, also eine zu starke dorso-ventrale Abplattung vortäuschen. Dem gegenüber hebt aber Kemna (1904, S. 355) und Abel (1919, S. 83) mit Recht hervor, daß der obersilurische Pteraspis eine fusiforme Fischform und keine dorso-ventrale Abplattung zeigt, also wohl ein etwas besserer Schwimmer als die andern Formen war, wenn er sich auch am Boden aufhielt, und Abel (1919, S. 67) weist weiter darauf hin, daß die seitlich platten Anaspida, deren Hautskelett ja keineswegs stark ist, wohl frei schwimmende Tiere waren. Während wir nun leider die hintere Körperhälfte der Pteraspidae so gut wie nicht kennen, ist wichtig, für die Anaspida hervorzuheben, daß ihr Schwanz nach der oben erörterten Auffassung im Gegensatz zu dem fast aller präkarbonischen

Wirbeltiere nicht heterocerk oder ein Mittelding zwischen diphycerk und heterocerk, also nicht epibatisch war, sondern ausgesprochen hypobatisch. Bei diesen Formen müßte also die Schwanzbewegung dazu geführt haben, das vordere Körperende nach oben zu drehen, während bei den andern Formen, die ihre Nahrung am Boden suchten, das Umgekehrte der Fall war. Wie diese Tiere aber bei ihrem völligen Mangel paariger Extremitäten gesteuert haben sollen, ist kaum zu verstehen.

Was im Übrigen die Frage der ältesten paarigen Extremitäten anlangt, so kann ich dazu nichts Neues bringen und muß nur die Tatsache erwähnen, daß keinerlei Übergang zwischen Flossen und Gehfüßen gefunden ist, daß man die ältesten sehr dürftigen Spuren von letzteren erst aus dem Oberdevon kennt, (Broili 1913, S. 51/52) die ältesten gewöhnlichen brust- und bauchständigen Fischflossen erst aus dem Mitteldevon (Heterocerci) und daß im Devon Archipterygien weitaus vorherrschen. Daneben und zum Teil im Obersilur finden sich Formen mit anormalen paarigen Fischflossen, die Acanthodi, mit gar nicht vergleichbaren vorderen gelenkigen Organen, die Antiarchi, solche ohne paarige Extremitäten (Ostracodermi), endlich die Arthrodira, bei welchen das Becken im Gegensatz zu dem aller Fische wie bei den Tetrapoda mit der Wirbelsäule in Verbindung steht (Jäkel 1906, S. 111, Stromer 1912, S. 36)[1]). Dieser Tatsachenbefund scheint mir zwar eine Stütze dafür, daß die gewöhnlichen paarigen Fischflossen etwas sekundäres sind d. h. daß sie wohl aus Archipterygien hervorgingen wie vielfach angenommen wird, aber kaum eine genügende Basis für die Annahme Jäkels (1911,

[1]) Es ist allerdings zu berücksichtigen, daß von paarigen Flossen mit nackter Haut, Hornstrahlen und unverkalktem Innenskelett sich nur unter besonders günstigen Umständen Abdrücke erhalten können. Es ist speziell bei Arthrodira sehr wahrscheinlich, daß sie paarige Flossen besaßen, bei Anaspida keineswegs ausgeschlossen und nur bei Antiarchi und gewissen Heterostraci und Osteostraci infolge geschlossener Panzerung nicht möglich, daß Brustflossen vorhanden waren.

S. 11 und 28), daß die ältesten Wirbeltiere von ursprünglichen Landtieren stammen. Denn wäre das der Fall, so ist kaum verständlich, warum gerade bei den ältesten bekannten Wirbeltieren die paarigen Extremitäten so schwach verkalkt und noch häufiger überhaupt sehr schwach oder gar nicht ausgebildet sind.

Diese Frage führt schließlich zu der Erörterung der Frage nach den Atmungsorganen der ältesten Wirbeltiere. Jäkel (1911, S. 27) geht ja so weit, alle ältesten Fische für Lungenfische zu halten, während Deecke (1913. S. 73 und 87/88) im schroffsten Gegensatze dazu meint, daß sogar die ältesten Dipnoi keine Lungenatmung hatten, und Kemna (1904, S. 355 ff.) für viele Placodermi das Vorhandensein von Kiementaschen annimmt. Exakte Beweise fehlen natürlich in Bezug auf die Organe selbst, bei vielen Formen sind aber Reste erhalten, die man für Kiemenöffnungen (Birkenia, Trematapis) oder Spuren von Kiemenspangen (Lasanius, Thelodus, Trematapis, Cyathaspis, Acanthodi) halten kann oder muß, und sind normale Kiemendeckel vorhanden (Crossopterygii, Dipnoi). Aber es ist immerhin auffällig, daß im Unterdevon Verwandte jetziger Lungenfische (Dipnoi) oder doch Darmatmer (Crossopterygii) so häufig sind. Daß erstere schon wirkliche Lungenfische waren, dafür möchte ich als Wahrscheinlichkeitsbeweis anführen, daß der unterdevonische Dipterus nach Traquair (1878 S. 9, Taf. 3, Fig. 1) Nasengänge wie der rezente Epiceratodus hatte, was bei reinen Kiemenatmern nicht vorkommt. Es scheint mir dieser Befund aber nur ein weiterer Wahrscheinlichkeitsbeweis dafür, daß diese Form wie ihre Begleiter im Oldred-Sandstein ein Bewohner von Binnengewässern war, während mir für die eingangs erwähnte kühne Hypothese Simroths, die Jäkel übernahm, nichts eindeutig zu sprechen scheint, und sehr viel dagegen.

Literatur-Verzeichnis.

Abel: Die Lebensweise der altpaläozoischen Fische. Verh. k. k. zool.-botan. Ges. 1907, S. 158—168, Wien 1907.

— Die Stämme der Wirbeltiere, S. 65—104, Wien 1919.

Broili: Unser Wissen über die ältesten Tetrapoden. Fortschr. naturwiss. Forschung, Bd. 8, S. 51—93, Berlin 1913.

Darton: Geology of the Bighorn mountains. U. St. geol. Survey profess. paper 51, S. 29, Washington 1906.

— Fish remains in Ordovician rocks in Bighorn mountains, Wyoming, etc. Bull. geol. Soc. America, Vol. 17, S. 550—552 und 563, Rochester 1906.

Deecke: Paläontologische Betrachtungen, IV. Fische. Neues Jahrb. f. Mineral., 1913 II, S. 86—92, Stuttgart 1913.

Dollo: La Paléontologie éthologique. Bull. Soc. belge de Géol. Mém. T. 23, S. 390—400, Brüssel 1910.

Frech: Lethaea palaeozoica, Bd. II, S. 82—83 und 232, 252, Stuttgart 1897.

Gebhardt: Über das älteste geologisch bekannte Vorkommen von Knochengewebe (Placodermen). Verhandl. anat. Ges., 21. Versamml., S. 72—90, 1907.

Goodrich: Fishes. Lankaster: A Treatise on Zoology IX, S. 184—209, London 1909.

Jaekel: Referat über Walcott: Preliminary notes etc. 1892 in Neues Jahrb. f. Mineral. 1895 II, S. 162, Stuttgart 1895.

— Über die Stammform der Wirbeltiere. Sitz.-Ber. Ges. naturf. Freunde, S. 107—129, Berlin 1896.

— Über Coccosteus und die Beurteilung der Placodermen. Ebenda 1902, S. 103—115.

— Einige Beiträge zur Morphologie der ältesten Wirbeltiere. Ebenda 1906, S. 180—189.

— Die Wirbeltiere, S. 29—38, Berlin 1911.

— Die Mundbildung der Wirbeltiere. Sitz.-Ber. Ges. naturf. Freunde 1919, S. 73—110, Berlin 1919.

Kemna: Les recents découvertes de poissons fossiles primitifs. Bull. Soc. belge de Géologie etc., T. 17, Mém. S. 339—382, Brüssel 1904.

Kiaer: A new downtonian fauna in the sandstone series of the Kristiania area. A preliminary report. Vidensk. Skrifter I, Nr. 7, S. 13—22, Kristiania 1911.

Matthew: New genus and new species of silurian fish. Trans. R. Soc. Canada, Ser. 3, Vol. 1, Sect. 4, S. 7—12, Ottawa 1907.

Patten: On the origin of Vertebrates. Verhandl. V. internat. Zool.-Kongr. Berlin 1901, S. 180—192, Jena 1902.

Peyer und Stromer: Über rezente und triassische Gebisse von Ceratodontidae. Zeitschr. d. D. geol. Ges., Bd. 69, Abh., S. 18—80, Berlin 1917.

Pompeckj: Fische, Paläontologie. Handwörterbuch d. Naturwiss., Bd. 3, S. 1110—1147, Jena 1913.

Rohon: Über untersilurische Fische. Bull. Acad. imp. sci. 1889 Mai, 10 S., St. Petersburg 1889.

Schlosser: Fische. Zittel, Broili: Grundzüge der Paläontologie, 3. Aufl. II., S. 26—44, 156—157, München 1918.

Simroth: Die Entstehung der Landtiere, S. 342—351, Leipzig 1891.

Steinmann: Die geologischen Grundlagen der Abstammungslehre. S. 203—205, Leipzig 1908.

Stromer: Lehrbuch der Paläozoologie. Bd. 2, S. 35—39, 45, Leipzig 1912.

Traquair: On the genera Dipterus, Palaeodaphus etc. Ann. Magaz. natur. hist., Ser. 5, Vol. 2, S. 1—12, London 1878.

— Report on fossil fishes collected by the geological Survey of Scotland in the silurian rocks of the South of Scotland. Trans. R. Soc., Vol. 39, S. 827—864 und Vol. 40, S. 879—888, Edinburgh 1898 und 1905.

— The bearings of fossil Ichthyology on the problem of evolution. Geolog. Magaz., Dec. 4, Vol. 7, S. 463—470, 516—524, London 1900.

Vaillant: Sur la presence du tissu osseux chez certains poissons des terrains paléozoiques de Canyon city (Colorado). Comptes rend. Acad. Sci., T. 134, S. 1321—1322, Paris 1902.

Walcott: Preliminary notes on the discovery of a Vertebrate fauna in silurian (ordovician) strata. Bull. geol. Soc. U. St. America, Vol. 3, S. 153—172, Rochester 1892.

Woodward: The study of fossil fishes. Proc. geol. Assoc., Vol. 19, S. 266—282, 1906.

Bedingte Flächenverbiegungen, insbesondere Gleitverbiegungen.

Von **Heinrich Liebmann.**

Vorgelegt in der Sitzung am 10. Januar 1920.

§ 1. Übersicht und Vorbemerkungen.

1. Die vorliegende Untersuchung ist verschiedenen Fragen aus dem umfangreichen Kapitel der Lehre von den Flächenverbiegungen gewidmet.

Im zweiten Paragraphen wird die kinematische (Nr. 1) und die statische Bedeutung (Nr. 2) der von Bianchi zuerst für die Untersuchung der infinitesimalen Verbiegungen verwendeten „assoziierten Fläche", auf die Volterra und Blaschke hingewiesen haben, kurz besprochen[1]).

§ 3 ist der Lehre von den analytischen Flächenverbiegungen gewidmet. Nr. 1 bringt die bekannten Grundlagen in Erinnerung und führt zunächst auf die alte Jellettsche Gleichung (9). In Nr. 2 wird auch die Verbiegung zweiter Ordnung auf die Integration einer einzigen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung und Quadraturen — anders als von Lagally[2]) — zurückgeführt (10) und zur Bestimmung der Verbiegungen dritter Ordnung (11) fortgeschritten.

[1]) Vgl. hierzu: A. Voss, Abbildung und Abwickelung zweier Flächen aufeinander (Math. Enc. III, D 6a), Nr. 32 (S. 426—432). — W. Blaschke, Kreis und Kugel (Jahresberichte d. D. M. V. 24 (1915), 195—207).

[2]) M. Lagally, Über unendlich kleine isometrische Verbiegungen einer Fläche mit höherer als erster Annäherung. Math. Ann. 76 (1915), 105—128.

In § 4 wird die Differentialgleichung (12) des Bourschen Problems[1]), das ist die Aufgabe der Bestimmung der Flächen aus ihrer ersten quadratischen Differentialform, dem Quadrate des Bogenelementes, zunächst in zwei besondere Formen gebracht (13, Nr. 1) und (14, Nr. 2), die zu den gesuchten Verallgemeinerungen der Formeln 9—11 führen, bzw. sich als besonders geeignet bei Rotationsflächen erweisen.

Damit wird die Grundlage für die rekurrierende Bestimmung der Verbiegungen aller Ordnungen gefunden (vgl. Formel 16, 17 und 18).

Im Anschluß an (18) werden dann in § 5 Spezialuntersuchungen für die Kugel durchgeführt. Hier sind die Verbiegungen erster Ordnung (22) durch eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung bestimmt (21), deren Lösung auch vom Standpunkt der Fuchsschen Theorie der linearen Differentialgleichungen aus besonderes Interesse bietet (Nr. 1). Es gibt insbesondere unter den infinitesimalen Verbiegungen der Kugel eine Auswahl derart, daß bei jeder dieser Verbiegungen die Punkte eines bestimmten, als Berandung einer Kalotte vorzustellenden Parallelkreises ebene Bahnen beschreiben und der Rand als ebene Kurve erhalten bleibt (Nr. 2). Wir nennen sie *Gleitverbiegungen*. Es lassen sich dann leicht Paare isometrischer ebenrandiger Flächenkalotten angeben (Nr. 3). Schließlich wird noch gezeigt, daß auf Grund von (18) nunmehr die Bestimmung der Verbiegungen zweiter Ordnung bei der Kugel nur noch *Quadraturen rationaler Funktionen* erfordert.

In § 6 wird eine Reihe weiterer Fragen behandelt. Zunächst wird die Differentialgleichung der Weingartenschen „Verschiebungsfunktion“ φ für die infinitesimale Verbiegung einer geschlossenen konvexen Rotationsfläche (25) aufgestellt und diskutiert (Nr. 1). Es ergibt sich, daß infinitesimale Bewegungen möglich sind, deren Regularitätsgebiet nur einen der beiden Achsenendpunkte ausschließen (Nr. 2). Sodann lassen sich die verschiedenen bisher behandelten „bedingten Ver-

[1]) Voss, a. a. O., Nr. 18 (S. 395—398).

biegungen“ affin übertragen (Nr. 3). Zum Schluß wird noch ein allgemeiner Satz über Gleitverbiegungen konvexer Flächenschalen aufgestellt (Nr. 4), der sein Gegenstück in der Lehre von den Polyederverbiegungen hat.

2. Es mag gestattet sein, gleich an dieser Stelle zur Deutung einer von Darboux ohne jede nähere Erklärung hingestellten Behauptung einen Beitrag zu geben[1]).

Wie ist wohl die Behauptung[2]) zu verstehen, daß die Bestimmung der Verbiegungen höherer Ordnung, d. h. der

$$\xi^{(k)},\ \eta^{(k)},\ \zeta^{(k)} \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots),$$

die in den Formeln (2) und (4), § 3, Nr. 1 auftreten, „nach bekannten Sätzen von Cauchy“ durch Quadraturen geleistet werden kann, sobald die infinitesimalen Verbiegungen ξ, η, ζ bekannt sind?

Die für $\zeta^{(k)}$ aufgestellte Differentialgleichung (8) ist linear, aber nicht homogen. Sie wird homogen für $k = 0$, d. h. für die z-Komponente der infinitesimalen Verbiegung, vgl. (9). Nun zeigt die Anwendung der in der Flächentheorie mit so glänzenden Erfolgen verwendeten Laplaceschen Kaskadenmethode[3]), daß die unverkürzte, nicht homogene Differentialgleichung (8) mit denselben Hilfsmitteln zu integrieren ist, wie die verkürzte (9). Das inhomogene Glied ist hier als bekannte Funktion vorauszusetzen, es enthält alle ξ, η, ζ bis zur Ordnung $k - 1$.

Also kann man in der Tat sagen, daß, wenn nicht nach Cauchy, so doch nach Laplace die Bestimmung der Verbiegungen höherer Ordnung nur mehr Quadraturen erfordert, wenn die infinitesimalen Verbiegungen bekannt sind.

[1]) Die hier gegebene Erklärung ist das Ergebnis mehrfacher Besprechungen mit meinem verehrten Kollegen Lagally.

[2]) Darboux, Théorie générale des surfaces IV (1896), p. 5. Auch Voss führt diese wichtige Stelle an (a. a. O., S. 427, Anm. 312).

[3]) A. R. Forsyth, Lehrbuch der Differentialgleichungen, 2. Auflage der deutschen Übersetzung (1912), S. 452 ff.

Übrigens wird später (§ 5, Nr. 4) die Verbiegung zweiter Ordnung für die Kugel durch Quadraturen geleistet ohne Verwendung der Kaskadenmethode.

3. Die ursprüngliche Absicht bei den vorliegenden Untersuchungen war, in Verfolgung des Zieles, das der Verfasser sich in einer Reihe von Arbeiten gestellt hat, weitere konkrete Fragen der Flächenverbiegung zu lösen, und die in Nr. 1 gegebene Übersicht weist auf die neuen Ergebnisse hin.

Ganz von selbst ergab sich dabei die in § 3 behandelte Frage. Die gegebene Lösung, nämlich die Angabe eines bestimmten Weges, um z. B. $\zeta^{(k)}$ aus ζ, $\zeta^{(1)} \ldots \zeta^{(k-1)}$ allein zu finden, ist praktisch sehr gut verwendbar. Eines fehlt dieser Lösung: Die elegante Symmetrie der Weingartenschen und der Lagallyschen Funktion, welche die Verbiegungen erster und zweiter Ordnung bestimmen.

Zu diesem Ziel gelangt man vielleicht, wenn es möglich ist, eine Bemerkung von Blaschke[1]) nutzbar zu machen, wo nach der von ihm (zuvor von Bianchi) behandelte „Drehriß", der dort für ein Paar endlich verschiedener isometrischer Flächen untersucht wird, durch geeigneten Grenzübergang sich in den Drehriß der infinitesimalen Verbiegung, also die assoziierte Fläche verwandelt. Hier scheint der Weg zu beginnen, der dazu führt, die Eleganz der für die Verbiegungen der ersten beiden Ordnungen gefundenen Funktionen mit dem Vorzug, den eine allgemein gültige Rekursionsformel besitzt, in vollem Umfang zu vereinigen.

Zur wirklichen Berechnung aber hat sich jedenfalls das hier gegebene Verfahren bereits bewährt.

§ 2. Drehriss und Kräfteplan.

1. Bei jeder infinitesimalen Verbiegung, die dem einzelnen Flächenpunkt $P(x, y, z)$ die Verschiebung $\varepsilon\xi$, $\varepsilon\eta$, $\varepsilon\zeta$ erteilt, erleidet das einzelne Flächenelement mit dieser Verschiebung

[1]) W. Blaschke, Über isometrische Flächenpaare (Jahresbericht d. D. M. V. 22 (1913), 154–183).

zugleich eine infinitesimale Drehung[1]), deren Komponenten εX, εY, εZ durch die Gleichungen

$$(1) \qquad \begin{aligned} d\xi &= Y dz - Z dy, \\ d\eta &= Z dx - X dz, \\ d\zeta &= X dy - Y dx \end{aligned}$$

gegeben sind. Dieses System (1) ist vollkommen äquivalent mit der bekannten Gleichung

$$(1') \qquad dx\, d\xi + dy\, d\eta + dz\, d\zeta = 0$$

der infinitesimalen Verbiegung.

Die Fläche mit den rechtwinkligen Koordinaten X, Y, Z ist genau die „assoziierte Fläche“ oder der „Drehriß“.

Wir wollen hier zeigen, wie man in einfachster Weise die Reziprozitätseigenschaft beweisen kann, d. h. den Satz, daß die Beziehung der Assoziiertheit wechselseitig ist.

Die Gleichungen (1), in denen man x, y, z und X, Y, Z durch allgemeine Gaußsche Koordinaten ausgedrückt zu denken hat, besagen doch, daß auch die rechten Seiten dieser Gleichungen vollständige Differentiale sein müssen, und dann sind

$$\begin{aligned} y\,dZ - z\,dY &= d(yZ - zY) + Y dz - Z dy = d\xi, \\ z\,dX - x\,dZ &= d(zX - xZ) + Z dx - X dz = d\eta, \\ x\,dY - y\,dX &= d(xY - yX) + X dy - Y dx = d\zeta \end{aligned}$$

ebenfalls vollständige Differentiale. Es ist also nach (1) oder (1') die Fläche (x, y, z) ihrerseits assoziiert zur Fläche (X, Y, Z) bei der infinitesimalen Verbiegung ξ, η, ζ.

2. Wir wollen jetzt, zum Teil mit kleiner Abschweifung von dem Wege, den Blaschke a. a. O. gewählt hat, noch zeigen, daß der *Drehriß* (X, Y, Z) zugleich als *Kräfteplan* innerer Spannungen (dX, dY, dZ) der Flächenhaut (x, y, z) gedeutet werden kann.

---

[1]) Vgl. hierzu außer der bereits angeführten Literatur die Arbeit „Die Verbiegung von geschlossenen und offenen Flächen positiver Krümmung“. (Diese Berichte 1919, S. 267—291.)

Denkt man sich eine biegsame unausdehnbare Flächenhaut (x, y, z) inneren Spannungen (Tangentialspannungen) unterworfen und dann längs einer geschlossenen Kurve aufgeschnitten, so setzen sich diese Spannungen zu Elementarkräften zusammen — wir wollen sie zunächst mit δX, δY, δZ bezeichnen — die in den einzelnen Elementen ds angreifen. Zu jeder Schnittrichtung $du : dv$ gehört eine solche tangentiale Spannung.

Nun müssen diese Kräfte, die längs einer beliebigen Schnittkurve auftreten, die Gleichgewichtsbedingungen der an einem starren Körper angreifenden Kräfte erfüllen, es müssen also die drei Integrale

$$\int \delta X, \quad \int \delta Y, \quad \int \delta Z$$

und die drei Integrale

$$\int (y\,\delta Z - z\,\delta Y), \quad \int (z\,\delta X - x\,\delta Z), \quad \int (x\,\delta Y - y\,\delta X)$$

längs beliebiger geschlossener Kurven genommen, immer gleich Null sein.

Demnach sind nicht nur

$$\delta X = dX, \quad \delta Y = dY, \quad \delta Z = dZ$$

vollständige Differentiale, sondern auch

$$dL = y\,dZ - z\,dY, \quad dM = z\,dX - x\,dZ, \quad dN = x\,dY - y\,dX.$$

Dann sind aber nach Nr. 1 die Flächen (x, y, z) und (X, Y, Z) einander wechselseitig assoziiert.

Hiernach kann also jeder *Drehriß* einer Flächenhaut zugleich als *Kräfteplan innerer Spannungen* gedeutet werden, und der reziproken Beziehung zwischen zwei assoziierten Flächen entspricht die reziproke Beziehung zwischen einer Flächenhaut und dem Kräfteplan ihrer inneren Spannungen.

Diese Reziprozität entspricht der Zuordnung zwischen Fachwerk und Kräfteplan, hat aber bei Flächenhäuten doch einen etwas andern Sinn als bei Systemen von Stäben; denn beim Fachwerk fällt die Spannung in die Richtung der Stäbe, während hier die Spannung dX, dY, dZ zwar innerhalb der

Tangentialebene liegt, dagegen nicht in die Richtung des Elementes ds (du, dv), dem sie zugeordnet ist.

Zur vollen Einsicht in die Beziehung zwischen (x, y, z) und (X, Y, Z) darf vielleicht nochmals besonders hervorgehoben werden, daß den Unterschieden dX, dY, dZ der Komponenten der Drehungen, welche die den Punkten $P(x, y, z)$ und $P_1(x + dx, y + dy, z + dz)$ zugehörigen Flächenelemente erleiden (den Komponenten der *relativen Drehung*) die Komponenten dX, dY, dZ der *Spannung* als gleichwertig zugeordnet sind, die auf das Element $ds = PP_1$ wirkt. Dagegen unterscheiden sich die Komponenten $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ der relativen Verschiebung von den Komponenten dL, dM, dN der Spannungsmomente um die Differentiale der drei Ortsfunktionen $yZ - zY$, $zX - xZ$, $xY - yX$.

§ 3. Analytische Flächenverbiegungen[1]).

1. Damit die analytisch von dem Parameter ε abhängenden Darstellungen

$$\begin{aligned} x_1 &= x + \varepsilon\xi + \varepsilon^2\xi^{(1)} + \varepsilon^3\xi^{(2)} + \cdots \\ y_1 &= y + \varepsilon\eta + \varepsilon^2\eta^{(1)} + \varepsilon^3\eta^{(2)} + \cdots \\ z_1 &= z + \varepsilon\zeta + \varepsilon^2\zeta^{(1)} + \varepsilon^3\zeta^{(2)} + \cdots \end{aligned} \tag{2}$$

die Koordinaten einer Schar von Flächen angeben, die zur Fläche (x, y, z) isometrisch sind, muß die Identität

$$dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \equiv 0 \tag{3}$$

für einen gewissen Wertbereich von ε bestehen.

Diese Forderung führt auf eine Reihe von Gleichungen, die man in zwei Schritten erhält. Man hat zunächst in (3) die Koeffizienten von ε, ε^2 usw. gleich Null zu setzen. Sodann hat man sich die rechtwinkligen Koordinaten (x, y, z) der Ausgangsfläche in Gaußschen Koordinaten (u, v) dargestellt zu denken

$$x = x(u, v),\quad y = y(u, v),\quad z = z(u, v),$$

[1]) Die Entwickelungen dieses Paragraphen setzen keine Vorkenntnisse voraus.

als deren Funktionen auch die ξ, η, ζ zu bestimmen sind. Man erhält aus jeder der durch die erste Überlegung gefundenen Gleichungen also wieder drei weitere, indem man die Koeffizienten von du^2, dv^2 und $du\,dv$ gleich Null setzt.

In diesem Paragraphen wählen wir für u und v durchweg x und y und erhalten dann unter Verwendung der Mongeschen Bezeichnungen p, q, r, s, t für die Differentialquotienten vom z und im übrigen von Fußmarken (1, 2) zur Bezeichnung der Differentiation nach x und y ganz allgemein

$$\begin{aligned} &\xi_1^{(k)} + p\,\zeta_1^{(k)} + P^{(k)} = 0,\\ &\eta_2^{(k)} + q\,\xi_2^{(k)} + R^{(k)} = 0,\\ &\xi_2^{(k)} + \eta_1^{(k)} + p\,\zeta_2^{(k)} + q\,\zeta_1^{(k)} + Q^{(k)} = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Die $P^{(k)}$, $Q^{(k)}$, $R^{(k)}$ sind aus den Differentialquotienten von z und allen ξ, η, ζ bis zur $(k-1)^{\text{ten}}$ Stufe zusammengesetzt, insbesondere ist

$$P^{(0)} = Q^{(0)} = R^{(0)} = 0,$$

d. h. zur Bestimmung von ξ, η, ζ der niedrigsten Stufe erhält man

$$\begin{aligned} &\xi_1 + p\,\zeta_1 = 0,\\ &\eta_2 + q\,\zeta_2 = 0,\\ &\xi_2 + \eta_1 + p\,\zeta_2 + q\,\zeta_1 = 0. \end{aligned}$$

Wir wollen nun zunächst ableiten, daß (4) zur Bestimmung von $\zeta^{(k)}$ auf eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung führt, nach deren Integration zur Bestimmung von $\xi^{(k)}$ und $\eta^{(k)}$ nur noch Quadraturen zu leisten sind. Zu diesem Zweck spalten wir die letzte Gleichung (4) durch Zerlegung auf in

$$\begin{aligned} &\xi_2^{(k)} + q\,\zeta_1^{(k)} + U^{(k)} + \eta'^{(k)} = 0\\ &\eta_1^{(k)} + p\,\zeta_2^{(k)} + V^{(k)} - \eta'^{(k)} = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

wobei

$$U^{(k)} + V^{(k)} = Q^{(k)}$$

sein muß. Durch Differentiation erhält man aus der ersten Gleichung (4) und aus der ersten Gleichung (5):

$$\xi_{12}^{(k)} + p\,\zeta_{12}^{(k)} + s\,\zeta_1^{(k)} + P_2^{(k)} = 0,$$
$$\xi_{12}^{(k)} + q\,\zeta_{11}^{(k)} + s\,\zeta_1^{(k)} + U_1^{(k)} + \eta_1^{(k)} = 0,$$

also

$$p\,\zeta_{12}^{(k)} - q\,\zeta_{11}^{(k)} + P_2^{(k)} - U_1^{(k)} - \eta_1^{(k)} = 0. \tag{6}$$

Ebenso erhält man

$$q\,\zeta_{12}^{(k)} - p\,\zeta_{22}^{(k)} + R_1^{(k)} - V_2^{(k)} + \eta_2^{(k)} = 0. \tag{7}$$

Differenziert man (6) nach y, (7) nach x und addiert, so folgt

$$2s\,\zeta_{12}^{(k)} - r\,\zeta_{22}^{(k)} - t\,\zeta_{11}^{(k)} + P_{22}^{(k)} - Q_{12}^{(k)} + R_{11}^{(k)} = 0. \tag{8}$$

Aus dieser Differentialgleichung ist $\zeta^{(k)}$ zu bestimmen, sodann aus (6) und (7) $\eta^{(k)}$ und endlich aus (4) und (5) $\xi^{(k)}$ und $\eta^{(k)}$.

Zur Bestimmung von ξ, η und ζ hat man also z. B. außer

$$r\,\zeta_{22} - 2s\,\zeta_{12} + t\,\zeta_{11} = 0 \tag{9}$$

die Gleichungen

$$\psi_1 = p\,\zeta_{12} - q\,\zeta_{11},\quad \psi_2 = p\,\zeta_{22} - q\,\zeta_{12},$$
$$\xi_1 = -p\,\zeta_1,\quad \xi_2 = -q\,\zeta_1 - \psi,\quad \eta_1 = -p\,\zeta_2 + \psi,\quad \eta_2 = -q\,\zeta_2.$$

Für die zweiten Differentialquotienten von ξ erhält man

$$\xi_{11} = -r\,\zeta_1 - p\,\zeta_{11},\quad \xi_{12} = -s\,\zeta_1 - p\,\zeta_{12},$$
$$\xi_{22} = -t\,\zeta_1 - q\,\zeta_{12} - \psi_2 = -t\,\zeta_1 - p\,\zeta_{22}$$

und entsprechend für η:

$$\eta_{11} = -r\,\zeta_2 - q\,\zeta_{11},\quad \eta_{12} = -s\,\zeta_2 - q\,\zeta_{12},\quad \eta_{22} = -t\,\zeta_2 - q\,\zeta_{22},$$

die zweiten Differentialquotienten von ξ und η können also durch die von ζ und z vollständig ausgedrückt werden.

2. Wir gehen weiter zu den Verbiegungen zweiter Stufe ($\xi^{(1)}$, $\eta^{(1)}$, $\zeta^{(1)}$) und dritter Stufe ($\xi^{(2)}$, $\eta^{(2)}$, $\zeta^{(2)}$). Die Ansätze (2) und (3) führen, wenn man den Koeffizienten von ε^2 gleich Null setzt, auf

$$2\Sigma\,dx\,d\xi^{(1)} + \Sigma\,d\xi^2 = 0.$$

Dies gibt

$$\xi_1^{(1)} + p\,\zeta_1^{(1)} + P^{(1)} = 0,$$
$$\eta_2^{(1)} + q\,\zeta_2^{(1)} + R^{(1)} = 0, \tag{4'}$$
$$\xi_2^{(1)} + \eta_1^{(1)} + p\,\zeta_2^{(1)} + q\,\zeta_1^{(1)} + Q^{(1)} = 0;$$

dabei ist gesetzt

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\xi_1^2 = P^{(1)},\quad \tfrac{1}{2}\Sigma\xi_2^2 = R^{(1)},\quad \Sigma\xi_1\xi_2 = Q^{(1)}.$$

Um hieraus die Differentialgleichung für $\zeta^{(1)}$ zu bilden, braucht man nach (8) noch

$$P_{22}^{(1)} - Q_{12}^{(1)} + R_{11}^{(1)},$$

wofür sich ergibt

$$\Sigma(\xi_{11}\xi_{22} - \xi_{12}^2).$$

Die ersten beiden Glieder der Summe werden mit Rücksicht auf die Formeln am Schluß von Nr. 1 und auf (9):

$$\xi_{11}\xi_{22} - \xi_{12}^2 = (rt - s^2)\zeta_1^2 + p^2(\zeta_{11}\zeta_{22} - \zeta_{12}^2).$$
$$\eta_{11}\eta_{22} - \eta_{12}^2 = (rt - s^2)\zeta_2^2 + q^2(\zeta_{11}\zeta_{22} - \zeta_{12}^2).$$

so daß (8) jetzt die Gestalt annimmt

$$\begin{aligned}(10)\qquad & r\zeta_{22}^{(1)} - 2s\zeta_{12}^{(1)} + t\zeta_{11}^{(1)} + (1 + p^2 + q^2)(\zeta_{11}\zeta_{22} - \zeta_{12}^2)\\ & + (rt - s^2)(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) = 0.\end{aligned}$$

Man braucht also, um $\zeta^{(1)}$ zu bestimmen, nur ζ zu kennen (nicht ξ und η!). Wir werden (10) später in anderer Form zur Berechnung der Verbiegung zweiter Ordnung für die Kugel heranziehen (§ 5) und besprechen hier nur kurz ein anderes Beispiel.

Beim *hyperbolischen Paraboloïd*

$$z = xy,\ (r = t = 0,\ s = 1)$$

wird aus (9) erhalten

$$\zeta_{12} = 0,$$

also

$$\zeta = f(x) + g(y),$$

und auch (10) ist in diesem Falle sofort zu integrieren.

Um die Verbiegungen dritter Ordnung zu bestimmen, hat man zunächst in (3) den Koeffizienten von ε^3, also

$$2\Sigma dx\, d\xi^{(2)} + 2\Sigma d\xi\, d\xi^{(1)}$$

gleich Null zu setzen.

Dies führt auf die Gleichungen

$$(4'') \quad \begin{aligned} &\xi_1^{(2)} + p\,\zeta_1^{(2)} + \Sigma\,\xi_1\,\xi_1^{(1)} = 0, \\ &\eta_2^{(2)} + q\,\zeta_2^{(2)} + \Sigma\,\xi_2\,\xi_2^{(1)} = 0, \\ &\xi_2^{(2)} + \eta_1^{(2)} + p\,\zeta_2^{(2)} + q\,\zeta_1^{(2)} + \Sigma(\xi_1\,\xi_2^{(1)} + \xi_2\,\xi_1^{(1)}) = 0, \end{aligned}$$

und hieraus erhält man mühelos

$$r\,\zeta_{22}^{(2)} - 2\,s\,\zeta_{12}^{(2)} + t\,\zeta_{11}^{(2)} + \Sigma\,\xi_{11}\,\xi_{22}^{(1)} + \Sigma\,\xi_{22}\,\xi_{11}^{(1)} - 2\,\Sigma\,\xi_{12}\,\xi_{12}^{(1)} = 0.$$

Daran schließt sich jetzt eine längere, aber durchaus elementare Rechnung, die schließlich auf folgende Differentialgleichung führt:

$$(11) \quad \begin{aligned} &r\,\zeta_{22}^{(2)} - 2\,s\,\zeta_{12}^{(2)} + t\,\zeta_{11}^{(2)} + 2\,(r\,t - s^2)\,(\zeta_1\,\zeta_1^{(1)} + \zeta_2\,\zeta_2^{(1)}) \\ &\quad - (p\,\zeta_1 + q\,\zeta_2)\,(r\,\zeta_{22}^{(1)} - 2\,s\,\zeta_{12}^{(1)} + t\,\zeta_{11}^{(1)}) \\ &\quad + (1 + p^2 + q^2)\,(\zeta_{11}\,\zeta_{22}^{(1)} - 2\,\zeta_{12}\,\zeta_{12}^{(1)} + \zeta_{22}\,\zeta_{11}^{(1)}) = 0. \end{aligned}$$

Diese Differentialgleichung ist ähnlich gebaut wie (10): Sie enthält weder ξ, η noch $\xi^{(1)}$, $\eta^{(1)}$, sondern eben nur ζ und $\zeta^{(1)}$. Man kann sich die Mühe ersparen, sie nachzuprüfen, da sie, wie wir sehen werden, auf ganz anderem Wege gewonnen werden kann.

§ 4. Die rekurrierende Differentialgleichung der analytischen Verbiegungen.

1. Um die allgemeine rekurrierende Differentialgleichung zu finden, welche $\xi^{(k)}$ mit den ξ, $\xi^{(1)} \cdots \xi^{(k-1)}$ oder $\eta^{(k)}$ mit η, $\eta^{(1)} \cdots \eta^{(k-1)}$ oder $\zeta^{(k)}$ mit ζ, $\zeta^{(1)} \cdots \zeta^{(k-1)}$ verbindet, hat man den elementaren Rahmen der Berechnungen von § 3 zu verlassen; man muß vielmehr von der Differentialgleichung des Bourschen Problems ausgehen und sie durch Reihenentwickelung nach Potenzen von ε zergliedern.

Wir gehen also davon aus, daß die rechtwinkligen Koordinaten der Fläche mit dem Bogenelement

$$ds^2 = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2$$

als Funktionen der allgemeinen Gaußschen Flächenkoordinaten (u, v) die Gleichung erfüllen[1])

$$(12) \quad \Delta_{22} f = (1 - \Delta_1 f) \cdot K.$$

[1]) Vgl. Voss, a. a. O., S. 396, Gleichung (2).

In (12) ist K das Krümmungsmaß, ferner

$$\Delta_1 f = \frac{E f_2^2 - 2 F f_1 f_2 + G f_1^2}{E G - F^2}$$

der erste Differentialparameter, und auf der linken Seite steht der folgende zweite Differentialparameter

$$\Delta_{22} f = \frac{\bar{f}_{11} \bar{f}_{22} - \bar{f}_{12}^2}{E G - F^2};$$

hierin sind die Abkürzungen gebraucht

$$\bar{f}_{ik} = f_{ik} - \left\{ \begin{matrix} ik \\ 1 \end{matrix} \right\} f_1 - \left\{ \begin{matrix} ik \\ 2 \end{matrix} \right\} f_2 \qquad (i, k = 1, 2).$$

Die hier auftretenden Christoffelschen Symbole können aus den Lehrbüchern der Flächentheorie[1]) entnommen werden.

Jetzt ist der einzuschlagende Weg klar vorgezeichnet: Ist z. B. $z(u, v)$ die dritte Koordinate einer Fläche mit dem gegebenen Bogenelement, so erfüllt z die Gleichung (12). Man setzt dann

$$f = z(u, v) + Z(u, v)$$

und erhält für Z eine Differentialgleichung aus (12). Schließlich setzt man

$$Z = \varepsilon \zeta + \varepsilon^2 \zeta^{(1)} + \varepsilon^3 \zeta^{(2)} + \cdots$$

in diese Gleichung ein und fordert sodann, daß die Koeffizienten von ε, ε^2, ε^3 . . . gleich Null werden. Auf diesem Wege erhält man die Kette der rekurrierenden Differentialgleichungen für ζ, $\zeta^{(1)}$ usw.

Wir wollen die Gleichung für f zunächst aufstellen, ausgehend von der Form der Flächengleichung

$$z = z(x, y)$$

Dann wird

$$E = 1 + p^2, \quad F = pq, \quad G = 1 + q^2,$$
$$\bar{f}_{11} = f_{11} - rM, \quad \bar{f}_{12} = f_{12} - sM, \quad f_{22} = f_{22} - tM,$$

[1]) Z. B. Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie, 2. Auflage der Übersetzung von Lukat (1910), S. 202, 115 und 66.

$$M = \frac{p f_1 + q f_2}{1 + p^2 + q^2},$$

ferner ist

$$K = \frac{r t - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}$$

und

$$\Delta_1 f = \frac{(1 + p^2) f_2^2 - 2 p q f_1 f_2 + (1 + q^2) f_1^2}{1 + p^2 + q^2},$$

so daß (12) die Gestalt annimmt

$$(13) \quad \begin{aligned} & f_{11} f_{22} - f_{12}^2 - \frac{(p f_1 + q f_2)}{1 + p^2 + q^2} (r f_{22} - 2 s f_{12} + t f_{11}) \\ & + \frac{(r t - s^2)}{1 + p^2 + q^2} (f_1^2 + f_2^2 - 1) = 0. \end{aligned}$$

Die Bedeutung dieser Gleichung ist also folgende: Gegeben sei die Fläche

$$z = z(x, y).$$

Wenn dann die Fläche

$$z_1 = z + Z(x, y), \quad x_1 = x + X(x, y), \quad y_1 = y + Y(x, y)$$

isometrisch ist zu ihr, so erfüllen $x_1\ y_1\ z_1$ als Funktionen von x und y die Differentialgleichung (13).

2. Wir wollen auch den Gang der Rechnung angeben, die auf die Differentialgleichung führt, welche die Biegungsflächen einer gegebenen Rotationsfläche bestimmt.

Ist die Rotationsfläche gegeben durch

$$x = r \cos v, \quad y = r \sin v,$$

$$(14) \quad r = \int_0^u \varrho \cos u \, du, \quad z = -\int_0^u \varrho \sin u \, du, \quad \varrho = \varrho(u),$$

so wird

$$ds^2 = \varrho^2 \, du^2 + dv^2,$$

$$\Delta_1 f = \frac{f_1^2}{\varrho^2} + \frac{f_2^2}{r^2},$$

und die Christoffelschen Symbole werden

$$\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} = \frac{\varrho'}{\varrho}, \quad \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} = 0, \quad \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} = 0, \quad \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} = \varrho\frac{\cos u}{r},$$

$$\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} = -r\frac{\cos u}{\varrho}, \quad \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} = 0.$$

Das Krümmungsmaß ist

$$K = \frac{\sin u}{r\varrho},$$

und so erhält man schließlich die Differentialgleichung

$$(15)\quad f_{11}f_{22} - f_{12}^2 + \frac{f_1 f_{11} r\cos u}{\varrho} + 2\frac{f_2 f_{12}\varrho\cos u}{r} - \frac{f_1 f_{22}\varrho'}{\varrho}$$
$$+ \frac{f_1^2}{\varrho^2}(r\varrho\sin u - r\varrho'\cos u) + \frac{f_2^2}{r^2}(r\varrho\sin u - \varrho^2\cos^2 u) - r\varrho\sin u = 0.$$

Die Fußmarken deuten selbstverständlich die Differentiation nach u und v an.

Der Sinn dieser Differentialgleichung ist also:

Damit die Fläche

$$x_1 = r\cos v + X(u,v), \quad y_1 = r\sin v + Y(u,v),$$
$$z_1 = -\int_0^u \varrho\sin u\,du + Z(u,v)$$

auf die Rotationsfläche (14) abwickelbar ist, müssen $x_1(u,v)$, $y_1(u,v)$, $z_1(u,v)$ der Gleichung (15) genügen.

Von diesen Stammgleichungen (13) und (15) aus wollen wir jetzt zur Bestimmung der analytischen Verbiegungen fortschreiten.

3. Das Programm ist in Nr. 1 vollständig entwickelt worden; wir schreiten zur Ausführung. Um

$$Z(x,y) = z_1(x,y) - z(x,y)$$

zu erhalten, hat man in (13) z_1 einzusetzen und erhält für $Z(x,y)$ die Gleichung

$$(16)\quad (rZ_{22} - 2sZ_{12} + tZ_{11})(1 - pZ_1 - qZ_2)$$
$$+ (1+p^2+q^2)(Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2) + (rt - s^2)(Z_1^2 + Z_2^2) = 0.$$

Setzt man hier

$$Z = \varepsilon \zeta,$$

so erhält man, indem man den Faktor von ε gleich Null setzt, wieder

(9) $$r\zeta_{22} - 2s\zeta_{12} + t\zeta_{11} = 0.$$

Führt man sodann ein

$$Z = \varepsilon\zeta + \varepsilon^2 \zeta^{(1)},$$

so wird der Faktor von ε^2:

$$r\zeta_{22}^{(1)} - 2s\zeta_{12}^{(1)} + t\zeta_{11}^{(1)} - (p\zeta_1 + q\zeta_2)(r\zeta_{22} - 2s\zeta_{12} + t\zeta_{11}) + (1 + p^2 + q^2)(\zeta_{11}\zeta_{22} - \zeta_{12}^2) + (rt - s^2)(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)$$

und man erhält durch Nullsetzen mit Rücksicht auf (9) wieder die Gleichung (10).

Die allgemeine Rekursionsgleichung hinzuschreiben, erübrigt sich wohl; sie würde eine viel unübersichtlichere Form haben, als die Stammgleichung (16), aus der sie jederzeit hergestellt werden kann.

Lehrreicher ist es, die Differentialgleichungen für X und Y herzustellen. Setzt man in (13)

$$f = x + X,$$

so erhält man für X die Gleichung:

$$(X_{11}X_{22} - X_{12}^2)(1 + p^2 + q^2) - (p(1 + X_1) + qX_2)(rX_{22} - 2sX_{12} + tX_{11}) + (rt - s^2)(2X_1 + X_1^2 + X_2^2) = 0,$$

und hieraus z. B. für ξ:

$$2\xi_1(rt - s^2) - p(r\xi_{22} - 2s\xi_{12} + t\xi_{11}) = 0.$$

4. Wir geben nun noch den Gang für die Berechnung der infinitesimalen bzw. analytischen Verbiegungen von Rotationsflächen an, mit Beschränkung auf die z-Koordinate.

Setzt man in (15) ein

$$f = z + Z(u, v) = -\int_0^u \varrho \sin u \, du + Z(u, v),$$

so kommt

$$f_1 = -\varrho \sin u + Z_1, \quad f_2 = Z_2,$$
$$f_{11} = -\varrho' \sin u - \varrho \cos u + Z_{11}, \quad f_{12} = Z_{12}, \quad f_{22} = Z_{22}$$

und als Stammgleichung zur Bestimmung der ζ, $\zeta^{(1)}$, $\zeta^{(2)}$ . . . demnach:

$$\begin{aligned} &Z_{11} r \sin u \cos u + Z_{22}(\varrho \cos u + \varrho' \sin u) + r Z_1 \left(1 + \sin^2 u \right. \\ &\left. - \frac{\varrho'}{\varrho} \sin u \cos u\right) = Z_{11} Z_{22} - Z_{12}^2 + Z_1 Z_{11} \frac{r \cos u}{\varrho} - \frac{Z_1 Z_{22} \varrho'}{\varrho} \\ &+ 2 \frac{Z_2 Z_{12} \varrho \cos u}{r} + \frac{Z_1^2}{\varrho^2}(r \varrho \sin u - r \varrho' \cos u) \\ &+ \frac{Z_2^2}{r^2}(r \varrho \sin u - \varrho^2 \cos^2 u). \end{aligned} \tag{17}$$

Insbesondere erhält man für den Fall der Kugel ($\varrho = 1$) die Gleichung

$$\begin{aligned} &Z_{11} \sin^2 u \cos u + Z_{22} \cos u + Z_1 \sin u (1 + \sin^2 u) \\ &= Z_{11} Z_{22} - Z_{12}^2 + Z_1 Z_{11} \sin u \cos u + 2 Z_2 Z_{12} \cot u \\ &\quad + Z_1^2 \sin^2 u + Z_2^2 (1 - \cot^2 u). \end{aligned} \tag{18}$$

Damit ist für die Bestimmung analytischer Verbiegungen aus der allgemeinen Differentialgleichung (12) nach den verschiedensten Seiten hin der Weg gebahnt.

Beiläufig bemerkt, es hat wohl großer Mut zur Aufstellung dieser Gleichung gehört; ist doch von vorneherein kaum zu erwarten, daß die Aufgabe, drei Funktionen von zwei Veränderlichen aus drei partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zu bestimmen, schließlich auf eine einzige partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung führt. Man hätte vielmehr auf ein System von Differentialgleichungen höherer Ordnung zu rechnen, für die gemeinsame Lösungen zu suchen sind.

§ 5. Die analytischen Verbiegungen der Kugel.

1. Um die infinitesimalen Verbiegungen der Kugel

$$x = \sin u \cos v, \quad y = \sin u \sin v, \quad z = \cos u \tag{19}$$

zu erhalten, kann man die auf elementarem Weg gefundene

Differentialgleichung (9) transformieren, indem man sie auf die Form bringt

$$\frac{\partial(\zeta_x, z_y)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial(\zeta_y, z_x)}{\partial(u, v)} = 0$$

und hier einsetzt

$$z_x = -\cos v \operatorname{tang} u, \quad z_y = -\sin v \operatorname{tang} u,$$

$$\zeta_x = \zeta_1 \frac{\cos v}{\cos u} - \zeta_2 \frac{\sin v}{\sin u}, \quad \zeta_y = \zeta_1 \frac{\sin v}{\cos u} + \zeta_2 \frac{\cos v}{\sin u}.$$

Einfacher ist es, sich diese Rechenübung zu ersparen und aus der mit Hilfe von (12) gefundenen Gleichung (18) unmittelbar zu entnehmen:

$$(18') \quad \sin^2 u \cos u \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} + \sin u (1 + \sin^2 u) \frac{\partial \zeta}{\partial u} + \cos u \frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} = 0.$$

Führt man hier an Stelle von u ein

$$t = \operatorname{tg} \frac{u}{2}$$

so kommt

$$(20) \quad t^2(1 - t^4) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + t(1 + 8t^2 - t^4) \frac{\partial \zeta}{\partial t} + (1 - t^4) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} = 0.$$

Wenn wir jetzt eine reguläre Verbiegung des Gebietes betrachten, das den Nordpol ($t = 0$) enthält, so ist ζ in Gestalt einer trigonometrischen Reihe vorzuschreiben, die nach den Sinus und Cosinus der ganzzahligen Vielfachen von v fortschreitet, wobei die Koeffizienten Funktionen von t sind. Beide Koeffizienten, der von $\sin kv$ und $\cos kv$, erfüllen dieselbe Differentialgleichung

$$(21) \quad t^2(1 - t^4) f''(t) + t(1 + 8t^2 - t^4) f'(t) - k^2(1 - t^4) f(t) = 0.$$

Die Fundamentallösungen dieser Gleichung sind

$$t^k \frac{1 + k + (1 - k) t^2}{1 + t^2}, \qquad t^{-k} \frac{1 - k + (1 + k) t^2}{1 + t^2};$$

sie gehen ineinander über, wenn man t mit t^{-1} vertauscht. Das war von vorneherein zu erwarten, denn dieser Vertauschung

entspricht die Vertauschung von Nordpol und Südpol der Kugel[1]).

Übrigens kommt für die Umgebung des Nordpols, wenn $k \geq 2$, nur die erste Lösung als regulär in Betracht, die zweite hat für $t = 0$ einen Pol.

Für $k = 1$ erhält man

$$f = c \cdot \frac{2t}{1+t^2} = c \sin u,$$

und diese Lösung bedeutet, wie nicht weiter ausgeführt zu werden braucht, eine infinitesimale Bewegung.

So erhält man schließlich

$$(22) \qquad \zeta(t, v) = \sum_1^\infty (a_k \cos kv + b_k \sin kv)\, t^k \frac{1 + k + (1-k)\, t^2}{1+t^2}$$

als Lösung, deren Regularitätsbereich nur den Südpol ($t = \infty$). ausschließt.

Die zugehörigen ξ und η sind durch Quadraturen zu bestimmen, und zwar entsprechen dem Gliede

$$(23) \qquad \zeta_k = t^k \cdot \frac{1 + k + (1-k)\, t^2}{1+t^2} \cos kv$$

die Glieder

$$\xi_k = \frac{t^{k+1}}{1+t^2}\left((k-1)\cos(k+1)v + (k+1)\cos(k-1)v\right)$$

$$\eta_k = \frac{t^{k+1}}{1+t^2}\left((k-1)\sin(k+1)v - (k+1)\sin(k-1)v\right).$$

2. Der für ζ gefundene Ausdruck gibt auch Aufschluß über infinitesimale Verbiegungen von bedingtem Charakter,

[1]) Die Integration von (21) ist die einzige Aufgabe, die außer Quadraturen zu leisten ist, wenn man die analytischen Verbiegungen der Kugel bestimmen will. Die Lösung wurde auf induktivem Wege gefunden; man kann sie aber auch systematisch aus der Fuchsschen Theorie ableiten. Ich verdanke diese Feststellung meinem verehrten Kollegen Schlesinger, der (21) als ein sehr instruktives Beispiel für eine Reihe von Sätzen dieser Theorie bezeichnet hat.

die wir *Gleitverbiegungen* nennen wollen[1]); darunter verstehen wir Verbiegungen einer Kalotte, wobei der den Rand bildende Parallelkreis als ebene Kurve erhalten bleiben soll.

Bei der Untersuchung kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit des Ergebnisses verlangen, daß ζ längs des Parallelkreises, also für jeden Wert von v, gleich Null werden soll. Das ist insofern keine Spezialisierung, als diese Nebenbedingung immer nachträglich durch Hinzufügen einer infinitesimalen Bewegung erfüllt werden kann, wenn nur der Parallelkreis eine ebene Kurve bleibt. Ein Blick auf (22) zeigt, daß alle Verbiegungen, die das Geforderte leisten, von der Form (23) sein müssen.

Als Randkurven von Kalotten, die mit Erhaltung ebener Berandung verbiegbar sind, treten also nur die durch

$$\operatorname{tg}\frac{u}{2} = t = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \qquad (k = 2, 3, \cdots)$$

oder

$$\cos u = -1 : k$$

gegebenen auf, das sind also „südliche Parallelkreise", deren Ebenen von der Äquatorebene die Abstände $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ usw. besitzen.

Den zunehmenden Werten von k entsprechen Parallelkreise, die den Äquator $\left(k = \infty,\ t = 1,\ u = \frac{\pi}{2}\right)$ als Häufungskurve haben, *aber die halbe, durch den Äquator begrenzte Kugelfläche läßt keine infinitesimale Gleitverbiegung zu,* denn für $t = 1$ ist ζ nach (22) nur dann identisch Null, wenn alle a_k und b_k gleich Null gewählt werden, und dann liegt eine infinitesimale Bewegung vor.

Ob auch endliche stetige Gleitverbiegungen möglich sind, wobei dann nur die angegebenen Kugelkalotten als Objekte solcher Verbiegungen in Betracht kommen, bleibt vorläufig unentschieden.

[1]) Vgl. diese Berichte (1919), S. 281.

3. Man kann noch eine Folgerung ziehen, wenn man sich an den bekannten Zusammenhang erinnert, der eine Beziehung zwischen einer infinitesimalen Verbiegung und einem (endlich verschiedenen) isometrischen Flächenpaar herstellt.

Es stellen nämlich wegen

$$\Sigma (d(x + \varepsilon \xi_k))^2 = \Sigma dx^2 + \varepsilon^2 \Sigma d\xi_k^2 = \Sigma (d(x - \varepsilon \xi_k))^2$$

die Gleichungen

$$x_1 = x + \varepsilon \zeta_k, \quad y_1 = y + \varepsilon \eta_k, \quad z_1 = z + \varepsilon \zeta_k$$

und

$$x_2 = x - \varepsilon \zeta_k, \quad y_2 = y - \varepsilon \eta_k, \quad z_2 = z - \varepsilon \zeta_k$$

zwei isometrische Flächen dar, die wir uns beide durch die Linie

$$u_k = \pi - \arccos \frac{1}{k},$$

die auf beiden Flächen in der Ebene

$$z = \cos u_k$$

gelegen ist, begrenzt denken. Damit ist die Existenz isometrischer ebenrandiger, übrigens algebraischer Paare von Flächenkalotten nachgewiesen.

4. Die Bestimmung der Verbiegungen zweiter Ordnung für die Kugel ist nunmehr auf elementare Rechnungen und Ausführung von Quadraturen rationaler Funktionen zurückgeführt. In der Tat erhält man aus der Stammgleichung (18) unter Verwendung von (22) für $\zeta^{(1)}$ jetzt eine Differentialgleichung von der Form

$$t^2(1-t^4)\frac{\partial^2 \zeta^{(1)}}{\partial t^2} + t(1 + 8t^2 - t^4)\frac{\partial \zeta^{(1)}}{\partial t} + (1-t^4)\frac{\partial^2 \zeta^{(1)}}{\partial v^2} = \frac{A_0(t)}{2} + \sum_1^\infty (A_k(t)\cos kv + B_k(t)\sin kv), \tag{24}$$

wobei die Koeffizienten rechterhand Summen rationaler Funktionen sind. Die rechte Seite ist zunächst aus Produkten und Quadranten trigonometrischer Reihen zusammengesetzt, die nach den Sinus und Cosinus der Vielfachen von v fortschreiten, und

es muß also diese Reihe erst richtig geordnet werden. Dabei hat man folgende Regel einzuhalten:

In jedem Produkt von der Form

$$\left(\frac{a_0}{2} + \sum_1^\infty (a_k \cos kv + b_k \sin kv)\right)\left(\frac{c_0}{2} + \sum_1^\infty (c_k \cos kv + d_k \sin kv)\right)$$

drücke man $\cos kv$ und $\sin kv$ aus durch e^{ikv} und e^{-ikv}, ordne jeden der beiden Faktoren nach auf- und absteigenden Potenzen von e^{iv} und multipliziere die so geordneten Reihen aus. Das formal gebildete Produkt ist wieder nach auf- und absteigenden Potenzen von e^{iv} und endlich wieder nach trigonometrischen Funktionen $\cos kv$ und $\sin kv$ zu ordnen.

(24) zerfällt dann, wenn man den Ansatz macht

$$\zeta^{(1)} = \tfrac{1}{2} g_0(t) + \sum_1^\infty (g_k(t) \cos kv + h_k(t) \sin kv)$$

wieder in gewöhnliche Differentialgleichungen von der Form

$$t^2(1-t^4) g_k''(t) + t(1 + 8t^2 - t^4) g_k'(t) - k^2(1-t^4) g_k(t) = A_k(t)$$

und entsprechende Gleichungen für $h_k(t)$.

Die Integration dieser Gleichungen erfordert, da die Lösungen der verkürzten Gleichung vorliegen, nur Quadraturen.

$\zeta^{(1)}$ setzt sich dann zusammen aus den mit neuen Koeffizienten a_k, b_k auszustattenden Lösungen der verkürzten Gleichungen und den durch Variation der Konstanten nach dem soeben angegebenen Verfahren berechneten „partikulären Lösungen" der unverkürzten Gleichung (24).

Dieses partikuläre Integral hat beispielsweise, wenn man von (23) ausgeht, die Gestalt

$$\zeta_k^{(1)} = \tfrac{1}{2} f_0(t) + f_{2k}(t) \cos 2kv.$$

Es lohnt sich wohl, die hier skizzierte, durchaus elementare Rechnung einmal auszuführen und unter Zugrundelegung von ζ_2, $\zeta_2^{(1)}$ und weiter $\zeta_2^{(2)}$ zu berechnen; man muß dann Flächen erhalten, die in beträchtlicher Umgebung des Nordpols gute „Modellgenauigkeit", d. h. nahezu konstantes Krüm-

mungsmaß Eins besitzen, um dann freilich beim Überschreiten des Parallelkreises $t = \sqrt{3}$ starke Abweichungen zu erleiden und sich (für $t = \infty$) ins Unendliche zu erstrecken.

Noch andere Untersuchungen können daran geknüpft werden, z. B. wäre es von Interesse, festzustellen, ob man auf diesem Wege vielleicht Flächen mit ebenen Krümmungslinien erhalten kann, die dann starke Annäherung an die Enneperschen Flächen aufweisen würden.

§ 6. Verbiegungen konvexer Rotationsflächen und anderer konvexer Flächen.

1. Wir haben bisher von der Verwendung der Weingartenschen Funktion φ abgesehen. Jetzt werden wir zur Bestimmung der infinitesimalen Verbiegungen konvexer geschlossener Rotationsflächen von ihr Gebrauch machen aus einem bald (am Schluß von Nr. 2) näher zu erläuternden Grund.

Bedient man sich derselben Flächenkoordinaten u, v wie in (§ 4) nämlich der sphärischen Koordinaten (Poldistanz und Länge) des bei der Abbildung durch parallele Normalen entstehenden sphärischen Bildes

$$X = \sin u \cos v, \quad Y = \sin u \sin v, \quad Z = \cos u,$$

dann wird[1])

$$D = -\varrho, \quad D' = 0, \quad D'' = -r \sin u,$$

und die Differentialgleichung für φ wird

$$\sin u (r \varphi_{11} + \varrho \cos u \varphi_1) + \varrho \varphi_{22} + \varphi \sin u (r + \varrho \sin u) = 0. \tag{25}$$

Diese Gleichung ist wieder durch den periodischen Ansatz

$$\varphi(u, v) = \tfrac{1}{2} f_0(u) + \sum_1^\infty (f_k(u) \cdot \cos k v + g_k(u) \sin k v)$$

auf gewöhnliche lineare Gleichungen zurückzuführen, indem man Koeffizientenvergleichung anwendet, und man erhält sowohl für f_k wie für g_k die Bedingung:

[1]) Vgl. Bianchi, a. a. O., S. 294 ff.

$$\sin u\,(r f_k''(u) + \varrho \cos u f_k'(u)) + f_k(u)\,(r \sin u + \varrho \sin^2 u - \varrho k^2) = 0.$$

Singuläre Stellen sind nur die Achsenendpunkte ($u = 0$ und $u = \pi$). Führt man ein

$$t = \operatorname{tg} \frac{u}{2},$$

so nimmt die Gleichung die Form an

$$(t^2 + \cdots) \frac{d^2 f_k}{dt^2} + (t + \cdots) \frac{df_k}{dt} - (k^2 + \cdots) f_k = 0,$$

also gibt es zwei Fundamentallösungen

$$t^k F_k(t), \quad t^{-k} G_k(t),$$

wobei $F_k(t)$ und $G_k(t)$ für alle endlichen Werte von t konvergieren. Benützt man jedesmal die erste Lösung, so erhält man eine auf der ganzen Fläche mit Ausnahme des Südpoles ($t = \infty$) reguläre Weingartensche Funktion.

2. Man entnimmt hieraus, daß die konvexe Rotationsfläche analytische infinitesimale Verbiegungen zuläßt, die überall mit Ausnahme eines der beiden Pole regulär sind. Man wird also auf den Satz geführt: *Jede konvexe geschlossene Rotationsfläche läßt reguläre infinitesimale Verbiegungen zu, sobald man in sie ein beliebig kleines, einen der beiden Pole ausschaltendes Loch geschnitten hat.*

Dieser Satz bedarf aber, damit sein Beweis bindend wird, noch einiger ergänzenden Betrachtungen. Man muß nämlich den Nachweis erbringen, daß der Regularitätsbereich der infinitesimalen Verbiegungen mit dem Regularitätsreich der Funktion φ zusammenfällt. Wir betrachten zu diesem Zweck den Zusammenhang von φ mit den Komponenten ξ, η, ζ der infinitesimalen Verbiegung. φ ist nach Volterra die nach der Normale genommene Komponente der infinitesimalen Drehung, die ein Element der Fläche erleidet. Bezeichnet man die Komponenten der Drehung wieder mit X, Y, Z (wie in § 1), so wird also

$$\varphi = \frac{\chi}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

wobei gesetzt ist

$$\chi = pX + qY - Z,$$

und es ist nach (1)

$$\xi_1 = -p\zeta_1, \quad \xi_2 = \chi - p\zeta_2, \quad \eta_1 = -q\zeta_1 - \chi, \quad \eta_2 = -q\zeta_2.$$

Differenziert man die erste Gleichung nach y und die zweite nach x, so erhält man

$$r\zeta_2 - s\zeta_1 = \chi_1,$$

und ebenso

$$s\zeta_2 - t\zeta_1 = \chi_2.$$

(Nebenbei bemerkt, folgt aus diesen beiden Gleichungen einerseits wieder (9), anderseits die partielle Differentialgleichung für χ und damit für φ, freilich in spezieller Gestalt, weil x und y, nicht die allgemeinen Flächenkoordinaten u und v als unabhängige Veränderliche gewählt sind.)

Man erhält dann aus φ oder χ die ξ, η, ζ durch Quadraturen. Nimmt man eine bestimmte Lösung φ, so sind diese Komponenten sicher soweit regulär, als die Formeln anwendbar sind, d. h. die z-Achse nicht zur Tangentialebene parallel ist, also vom Nordpol bis zum größten Parallelkreis. Dort hat man dann zu einem neuen rechtwinkligen Achsensystem überzugehen, zu dessen z-Achse man die (auf der Drehachse senkrechte) Normale wählt. Man kann im Sinne von Hilbert[1]) „schalenförmige Verschmelzung“ der Regularitätsgebiete vornehmen, d. h. die Fläche in vier einander zum Teil überdeckende Gebiete zerlegt denken, so daß kein Punkt, ausgenommen den auch für φ singulären Südpol, außerhalb aller Regularitätsgebiete liegt. Hieraus folgt dann, daß ξ, η, ζ sich tatsächlich überall mit Ausnahme des Südpols regulär verhalten.

Damit ist der zu Anfang dieser Nummer ausgesprochene Satz bewiesen.

[1]) D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Integralgleichungen VI (Gött. Nachr. 1910, 355—419).

Im Anschluß hieran sind noch zwei Bemerkungen zu machen.

Zunächst eine geometrische Folgerung: Die Methode von § 5, Nr. 3 führt hier auf endlich verschiedene Paare offener, aber mit beliebig kleiner Öffnung versehener isometrischer, konvexer Flächenschalen, freilich ohne daß ein Verbiegungsvorgang angegeben wird.

Ferner: Die Weingartensche Funktion, deren voller Regularitätsbereich in Nr. 1 erwiesen werden konnte, gibt, wie unsere Betrachtungen zeigen, ein viel besseres Hilfsmittel an die Hand, als durch die aus (17) folgende Gleichung:

$$r \sin u \cos u \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} + r\left(1 + \sin^2 u - \frac{\varrho'}{\varrho} \sin u \cos u\right) \frac{\partial \zeta}{\partial u}$$
$$+ (\varrho \cos u + \varrho' \sin u) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} = 0$$

gegeben ist.

Für die allgemeine Untersuchung dieser Gleichung wäre nämlich der größte Parallelkreis $\left(u = \frac{\pi}{2},\ \cos u = 0\right)$ ein Hindernis, eine Schranke, über die erst die Weingartensche Funktion hinweghilft.

3. In diesen Zusammenhang gehört noch die Bemerkung, daß nicht nur die „angebohrte“ Kugel, sondern auch die mit einer beliebig kleinen Öffnung versehene Ellipsoidfläche infinitesimale Verbiegungen zu lassen. Dasselbe gilt für die zu konvexen Rotationsflächen affinen Flächen, wenn man zuvor das einer Polkappe entsprechende Stück ausgeschnitten hat.

Alle diese Sätze folgen sofort aus dem bekannten Umstand, daß die Grundgleichung der infinitesimalen Verbiegung, nämlich

$$(1') \qquad dx\, d\xi + dy\, d\eta + dz\, d\zeta = 0$$

bei den kontragredienten linearen Substitutionen

$$x = a_{11} x_1 + a_{12} y_1 + a_{13} z_1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\xi_1 = a_{11} \xi + a_{21} \eta + a_{31} \zeta$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

unverändert bleibt, womit dann jede reguläre infinitesimale Verbiegung einer Fläche zugleich entsprechende Verbiegungen für affine Flächen an die Hand gibt.

In diesem Sinne führt dann z. B. § 5, Nr. 3 durch Anwendung von Affinität auf die Konstruktion von Ellipsoidkalotten, die Gleitverbiegungen zu lassen.

So erhält denn der Bestand an verbiegbaren Flächenstücken einen beträchtlichen Zuwachs — doch wird es noch mancher Untersuchungen bedürfen, bis die analytische Begründung dem nachkommt, was für die Anschauung als Gewißheit bezeichnet werden kann[1]).

4. Wir wollen noch ein letztes Beispiel bedingter infinitesimaler Verbiegung behandeln, nämlich allgemein die Gleitverbiegung konvexer Flächenkalotten in Angriff nehmen.

Dabei wollen wir die Fragestellung noch etwas verallgemeinern: Wir suchen nach einfachen Eigenschaften der Kurven, längs deren eine Komponente der infinitesimalen Verschiebung, z. B. ζ, gleich Null ist. (Ist eine solche *Nullkurve* eben, dann liegt eine Gleitverbiegung vor.)

Über die Nullkurven gibt nun die Differentialgleichung (9) in sehr allgemeiner Weise Aufschluß. Entwickelt man ζ nach Potenzen von $(x - x_0)$, $(y - y_0)$, wobei x_0, y_0 (z_0) ein Punkt der Fläche ist, in dem r, s, t die Werte r_0, s_0, t_0 haben mögen, so kommt aus (9) für die Glieder niedrigster Ordnung die Differentialgleichung

$$t_0 \zeta_{11}^{(m)} - 2 s \zeta_{12}^{(m)} + r_0 \zeta_{22}^{(m)} = 0.$$

Dabei ist unter Voraussetzung der Konvexität

$$r_0 t_0 - s_0^2 > 0,$$

daher $\zeta^{(m)}$ indefinit und ζ (x_0, y_0) also kein extremer Wert. Im Regularitätsgebiet, wo die Entwickelung konvergiert, hat also ζ kein Maximum und kein Minimum.

---

[1]) Es ist zu erwarten, daß jede Eifläche, aus der ein beliebig kleines Stück herausgeschnitten ist, verbogen werden kann.

Dieses Gebiet kann so gewählt werden:

Ein beliebiger Punkt 0 der Fläche wird zum Koordinatenanfang gewählt und die Tangentialebene daselbst als xy-Ebene; es reicht dann bis zu den Punkten der Fläche, in denen die Tangentialebene zur z-Achse, d. h. der Normale in 0 parallel ist.

Es ergibt sich also, daß die Komponente der infinitesimalen Verschiebung in einer bestimmten Richtung ihre Extreme nicht erreichen kann diesseits der Eigenschattengrenze, die bei Beleuchtung parallel zu dieser Richtung auftritt. ζ kann nicht längs einer innerhalb dieser Grenze gelegenen geschlossenen Kurve gleich Null sein, ohne daß die Verbiegung in eine Bewegung ausartet. Dagegen kann ζ gleich Null werden längs einer geschlossenen Kurve, die im Eigenschattengebiet liegt. Doch kennt man Einzelheiten hierüber nicht, abgesehen von den Gleitverbiegungen für Kugel und Ellipsoid, die wir im Laufe unserer Untersuchungen kennen gelernt haben (§ 5, Nr. 2 und § 6, Nr. 3).

Durch Anwendung des schon in § 5, Nr. 3 gebrauchten Verfahrens lassen sich noch weitere Schlüsse ziehen[1]). Zwei isometrische Flächenkalotten, deren Ränder in derselben Ebene liegen, führen zur Konstruktion einer infinitesimalen Gleitverbiegung der „Mittelfläche", d. h. des Ortes des Mittelpunkts der Verbindungsstrecken entsprechender Punktepaare. Aus dem soeben für infinitesimale Gleitverbiegungen bewiesenen Satze folgt also:

Eine Flächenkalotte durchweg positiver Krümmung, deren bei der Abbildung durch parallele Normalen erhaltenes sphärisches Bild innerhalb eines Hauptkreises der Kugel liegt, läßt keine endliche stetige Gleitverbiegung zu.

Dieser Satz hat sein Gegenstück in der Lehre von den Polyederdeformationen. Ein Polyederdeckel, das heißt eine von ebenem, offenem Rand begrenzte konvexe Polyederhaube (S), die in Verbindung mit dem Spiegelbild (S') an der Ebene der

[1]) Vgl. diese Berichte (1919), S. 282—284.

Randkurve ein geschlossenes konvexes Polyder $(S + S')$ bildet, kann auch keine „Gleitverbiegung" zulassen, bei der das offene Randpolygon eben bleibt; denn hieraus würde, in Widerspruch zum Cauchyschen Polyedersatz, die Deformation von $(S + S')$ folgen.

Über Potentialtheorie und konforme Abbildung.

Von **Georg Faber.**

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 7. Februar 1920.

Die folgenden Ausführungen gelten einem Kreis von Fragen und Aufgaben, der in den letzten Jahren vielfach und von verschiedenen Seiten erforscht wurde. Doch genügt es zur Herstellung des Zusammenhangs, wenn ich hier auf die unten angeführten Abhandlungen hinweise[1]).

§ 1. Die Robinsche Belegung und die Näherungslemniskaten einer geschlossenen Kurve.

Die Punkte einer Ebene bezeichne ich in der bekannten Weise mit $x = \xi + i\eta$ und insbesondere die einer geschlossenen Kurve Γ mit $\bar{x} = \bar{\xi} + i\bar{\eta}$. Γ soll sich selbst nicht überkreuzen, darf aber ganz oder zum Teil auf ein (doppelt zu zählendes) Bogen- oder Geradenstück zusammenschrumpfen.

Es gibt bekanntlich auf Γ eine Belegungsfunktion $\mu(\bar{x})$, die folgende Eigenschaften besitzt: Das logarithmische Potential

$$1) \qquad u(\xi, \eta) = \int_{+\Gamma} \mu(\bar{x}) \ln|x - \bar{x}| \, |d\bar{x}|$$

[1]) L. Bieberbach, Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln. Berliner Sitzungsberichte, Bd. 38 (1916), S. 940—955. — G. Pick, Über den Koebeschen Verzerrungssatz. Leipziger Berichte, Bd. 68 (1916), S. 58 bis 64. — K. Löwner, Extremumsätze bei der konformen Abbildung. Math. Zeitschrift, Bd. 3 (1919), S. 65—77.

ist konstant auf Γ, etwa $= ln\, \varrho$, wo $\varrho > 0$; ferner gilt

$$2) \qquad \int_{+\Gamma} \mu(\bar{x})\, |d\bar{x}| = 1$$

und

$$3) \qquad \mu(\bar{x}) \geq 0.$$

$\mu(\bar{x})$ findet man bekanntlich mittels des Robinschen Verfahrens[1]); ϱ möge die Robinsche Konstante der Kurve Γ heißen, nötigenfalls schreiben wir statt ϱ deutlicher $\varrho(\Gamma)$.

Für alle x irgend eines Gebietes außerhalb Γ kann man das Integral (1) näherungsweise durch eine Summe

$$4) \qquad \begin{aligned} u_k(\xi, \eta) = \mu_1 ln\, |x - \bar{x}_1| + \mu_2 ln\, |x - \bar{x}_2| \\ + \cdots + \mu_k ln\, |x - \bar{x}_k| \end{aligned}$$

darstellen, wobei die μ_i noch die Gleichung

$$5) \qquad \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k = 1$$

befriedigen mögen (vgl. (2)). Außerdem dürfen wir uns die μ_i als rationale Zahlen mit dem gemeinsamen Nenner n vorstellen:

$$6) \qquad \mu_i = \frac{\nu_i}{n}.$$

Die Tatsache, daß gleichmäßig für alle x irgend eines außerhalb Γ gelegenen Gebietes

$$7) \qquad \lim_{k \to \infty} u_k(\xi, \eta) = u(\xi, \eta)$$

ist, läßt sich nun auch so ausdrücken: Die „Lemniskaten"

$$8) \qquad |x - \bar{x}_1|^{\nu_1} \cdot |x - \bar{x}_2|^{\nu_2} \cdots |x - \bar{x}_k|^{\nu_k} = (\varrho + \varepsilon)^n$$

unterscheiden sich, wenn k hinreichend groß und $\varepsilon > 0$ genügend klein ist, beliebig wenig von der Kurve Γ.

Durch die Gleichung

$$9) \qquad z = \lim_{k \to \infty} \left[(x - x_1)^{\nu_1} \cdot (x - \bar{x}_2)^{\nu_2} \cdots (x - \bar{x}_k)^{\nu_k}\right]^{\frac{1}{n}}$$

[1]) S. z. B. Enzykl. d. math. Wiss. II 3, S. 233.

mit der die n^{te} Wurzel eindeutig machenden Nebenbedingung

10) $$\lim_{x \to \infty} \frac{z}{x} = 1$$

wird das Äußere Γ_a der Kurve Γ auf das Äußere des Kreises $|z| = \varrho$ konform abgebildet. In der Umgebung der Stelle $x = \infty$ kann man für (9) auch schreiben:

11) $$z = x + c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots,$$

während die Umkehrung von (9) durch die für alle $|z| > \varrho$ konvergierende Potenzreihe

12) $$x = z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots$$

geleistet wird.

Der Punkt $x = -c_0 = a_0$ ist offenbar der Schwerpunkt der Robinschen Belegung, während die übrigen Koeffizienten von den höheren Momenten dieser Belegung abhängen; für die Koeffizienten der Entwickelung

13) $$\frac{d \ln z}{dx} = \frac{1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \frac{b_3}{x^3} + \cdots$$

ergeben sich aus (9) die Formeln:

14) $$b_2 = \int_{+\Gamma} \bar{x}\, \mu(\bar{x})\, d\bar{x}|, \quad b_3 = \int_{+\Gamma} \bar{x}^2\, \mu(x)\, dx| \text{ usw.}$$

§ 2. Zusammenhang mit dem Cauchyschen Integralsatz.

Es verlohnt sich, den Zusammenhang zwischen Potentialtheorie und Funktionentheorie noch von einer anderen Seite her zu beleuchten. Wir gehen daher von der Formel (9) aus, die wir kurz so schreiben:

15) $$z = \varphi(x).$$

Durch diese Funktion wird also das Außengebiet Γ_a auf das Äußere des Kreises $|z| = \varrho$ abgebildet; daher ist $\varphi(x)$ in Γ_a von Null verschieden und regulär bis auf einen Pol im

Punkte ∞. Ist nun x_1 irgend ein Punkt im Innern[1]) von Γ, so wird $ln\,\frac{\varphi(x)}{x-x_1}$ in Γ_a regulär; man wähle dabei etwa den Zweig der Funktion $ln\,\frac{\varphi(x)}{x-x_1}$, der für $x=\infty$ verschwindet. Nach dem Cauchyschen Integralsatz erhält man

$$16)\qquad ln\,\frac{\varphi(x)}{x-x_1}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{+\Gamma} ln\,\frac{\varphi(\bar{x})}{\bar{x}-x_1}\,\frac{d\bar{x}}{\bar{x}-x}$$

und nach partieller Integration:

$$17)\qquad =\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{+\Gamma}\left(\frac{\varphi'(\bar{x})}{\varphi(\bar{x})}-\frac{1}{\bar{x}-x_1}\right) ln\,(x-\bar{x})\,d\bar{x}.$$

Für $ln\,(x-\bar{x})$ kann irgend ein Zweig dieser Funktion eingesetzt werden, da

$$\int\limits_{\Gamma}\left(\frac{\varphi'(\bar{x})}{\varphi(\bar{x})}-\frac{1}{\bar{x}-x_1}\right)d\bar{x}$$

verschwindet. Nun ist

$$\int\limits_{+\Gamma} ln\,(x-\bar{x})\,\frac{d\bar{x}}{\bar{x}-x_1}$$

für alle x irgend eines endlichen ganz in Γ_a gelegenen einfach zusammenhängenden Bereiches eine eindeutige und reguläre Funktion $\chi(x)$; durch Differenzieren unter dem Integralzeichen findet man

$$\chi'(x)=\int\limits_{+\Gamma}\frac{d\bar{x}}{(x-\bar{x})(\bar{x}-x_1)}.$$

Die hier zu integrierende Funktion von $\bar{x}$ hat im Innern von Γ den einen Pol $\bar{x}=x_1$ mit dem Residuum $\frac{1}{x-x_1}$: es ist also

[1]) Falls Γ kein Inneres besitzt, sind die Überlegungen durch Einschiebung eines weiteren Grenzüberganges ein wenig abzuändern.

18) $$\chi'(x) = \frac{2\pi i}{x - x_1},$$

also

19) $$\chi(x) = 2\pi i\,(ln\,(x - x_1) + ln\,C),$$

wo $ln\,C$ eine Integrationskonstante bedeutet.

Setzt man diesen Wert in (17) ein, so findet man

20) $$ln\,\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{+\Gamma} \frac{\varphi'(\bar{x})}{\varphi(x)}\,ln\,(x - \bar{x})\,d\bar{x} - ln\,C,$$

wo jetzt beide Seiten bloß bis auf Vielfache von $2\pi i$ bestimmt sind. Entwickelt man beiderseits in eine Reihe der Form $ln\,x + \frac{d_1}{x} + \frac{d_2}{x^2} + \cdots$ (vgl. 11), so ergibt sich durch Koeffizientenvergleichung: $ln\,C = 0$. Nun ist

$$\begin{aligned}\frac{\varphi'(\bar{x})}{\varphi(\bar{x})} &= \frac{d}{|d\bar{x}|}\,[ln\,|\varphi(x)| + i\,\arcsin\varphi(\bar{x})]\;\frac{|d\bar{x}|}{d\bar{x}}\\ &= i\,\frac{d}{|d\bar{x}|}\,[\arcsin\varphi(\bar{x})]\,\frac{|dx|}{d\bar{x}}, \quad \text{weil } |\varphi(\bar{x})| \text{ konstant } = \varrho \text{ auf } \Gamma,\\ &= i\,\frac{d}{dn}\,ln\,|\varphi(x)|\,\frac{|dx|}{d\bar{x}},\end{aligned}$$

wo nunmehr nach der äußeren Normalen von Γ differenziert wird. Durch Einsetzen in (20) erhält man schließlich

21) $$\begin{aligned}ln\,\varphi(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{+\Gamma}\frac{d\,ln\,|\varphi(x)|}{dn}\,ln\,(x - \bar{x})\,|dx\\ &= \frac{1}{2\pi\varrho}\int_{+\Gamma}\frac{d\,|\varphi(x)|}{dn}\,ln\,(x - \bar{x})\,|dx|.\end{aligned}$$

Trennt man in Gleichung (21) Reelles und Imaginäres, so erhält man:

22) $$ln\,|\varphi(x)| = u(\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\int_{+I}\frac{d\,ln\,|\varphi(\bar{x})|}{dn}\,ln\,|x - \bar{x}|\,|dx|,$$

$$23) \quad \arcsin \varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{+\Gamma} \frac{d \ln |\varphi(x)|}{dn} \arcsin (x - \bar{x}) \, |dx| .$$

Die Vergleichung von (1) und (22) führt zu der bekannten Formel:

$$24) \quad \begin{aligned} \mu(x) &= \frac{1}{2\pi} \frac{d \ln |\varphi(x)|}{dn} = \frac{1}{2\pi} \frac{du(\xi, \eta)}{dn} \\ &= \frac{1}{2\pi\varrho} \frac{d |\varphi(x)|}{dn} = \frac{1}{2\pi\varrho} |\varphi'(x)| , \end{aligned}$$

falls dieser Differentialquotient existiert.

Die Gleichungen (22), (23) geben Aufschluß über die Verzerrung, die eine Figur der x-Ebene durch die Abbildung (15) erleidet. Man entnimmt aus ihnen mit Rücksicht auf (2) unmittelbar folgenden Satz:

Sind x, z zwei einander entsprechende Punkte und x', x'' zwei auf Γ passend gewählte Punkte, so ist

$$25) \quad |z| = |x - x'| ,$$

$$26) \quad \arcsin |z| = \arcsin |(x - x')| .$$

Ein ebenso anschaulicher Verzerrungssatz ergibt sich aus Gleichung (12), wenn man beachtet, daß beispielsweise für $a_0 = 0$ und für $|z| = \varrho = 1$.

$$27) \quad |x| \leq 2$$

bleibt (s. § 4). Daraus folgt, daß es eine Konstante $r < 3$ gibt der Art, daß für alle $|z| \geq 1$ die Reihe

$$\left| \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots \right| < r ,$$

also auch

$$28) \quad < \frac{r}{|z|}$$

bleibt (nach dem sog. Schwarzschen Lemna). D. h. aber:

Bildet die Funktion

$$29) \quad x = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots$$

das Äußere des Einheitskreises der z-Ebene schlicht ab, so liegt der Bildpunkt irgend eines Punktes $z = a$ in einem Kreis mit dem Radius $\frac{r}{a|}$ um den Punkt $x = a$. r ist ≥ 1 und < 3.

§ 3. Die Tschebyscheffschen Polynome.

Wir betrachten nun noch die zur Kurve Γ gehörigen Tschebyscheffschen Polynome

30) $$T_n(x) = x^n + t_{n-1}^{(n)} x^{n-1} + t_{n-2}^{(n)} x^{n-2} + \cdots + t_0^{(n)},$$

deren Maximum des Betrags auf Γ möglichst klein ausfällt. Dieses Maximum bezeichnen wir mit τ_n^n und nennen τ_n die n^{te} Tschebyscheffsche Konstante der Kurve Γ. Zu einer Γ ganz umschließenden Kurve Γ' gehören offenbar Tschebyscheffsche Konstante $\tau_n' > \tau_n$.

Nun sei Γ'' eine aus Γ durch ähnliche Vergrößerung entstehende Kurve, die ganz außerhalb der Γ umschließenden Lemniskate L, deren Gleichung (8) ist, verläuft. Das Vergrößerungsverhältnis sei $(1 + \eta) : 1$; dabei darf angenommen werden, daß η mit ε beliebig klein wird. Dann folgt aus der Ungleichung $\tau_n(\Gamma'') > \tau_n(L) > \tau_n(\Gamma)$ und aus den Gleichungen $\tau_n(\Gamma'') = (1 + \eta)\,\tau_n(\Gamma)$, $\tau_n(L) = \varrho + \varepsilon$:

31) $$\lim_{n \to \infty} \tau_n = \varrho.$$

Ferner erkennt man: es sind alle

32) $$\tau_n \geq \varrho;$$

wäre nämlich $\tau_n < \varrho$, so wäre im Widerspruch mit (31) für $m = 2, 3, \cdots$: $\tau_{nm} \leq \tau_n < \varrho$. Zugleich ist ersichtlich, daß in (32) das Zeichen $=$ nur dann möglich ist, wenn Γ eine Lemniskate ist.

Wenn Γ kein Kreis ist so gilt die Umgleichung

33) $\varrho^2 \pi >$ Fläche des Innengebiets von Γ (Bieberbach, a. a. O. S. 943).

Aus (32), (33) folgt:

I. Umschließt die Kurve Γ einen Flächeninhalt $\geq r^2\pi$, so nimmt der Betrag jedes Polynoms der Form

34) $$x^n + k_{n-1}x^{n-1} + k_{n-2}x^{n-2} + \cdots + k_0$$

auf Γ einen Maximalwert $> r^n$ an, außer wenn das Polynom gleich $(x-a)^n$ und Γ ein Kreis um a vom Radius r ist.

Dem Satze (33) kann man den folgenden gegenüberstellen:

II. Wenn Γ kein Kreis ist, so ist der Umfang von $\Gamma > 2\pi\varrho$. Denn

$$\int_{+\Gamma} d\bar{x} = \int_{|z|=\varrho} \left|\frac{dx}{dz}\right| dz = \varrho \int_{|z|=\varrho} \left|\frac{1}{z}\right| \left|\frac{dx}{dz}\right| dz > \varrho \left| \int_{|z|=\varrho} \frac{1}{z}\frac{dx}{dz} dz \right| = 2\pi\varrho;$$

das Zeichen $=$ gilt hier überall nur dann, wenn $x = z$ ist.

Für besondere Kurven kann man viel genauere Aussagen machen als die des Satzes I, z. B. gilt für eine Ellipse[1]) mit den Halbachsen a, b: $2^n \tau_n^n = (a+b)^n + (a-b)^n$; ferner für einen doppelt zählenden Kreisbogen vom Radius r und vom Zentriwinkel 4ϑ $(< 2\pi)$: $\tau_n > \varrho = r\sin\vartheta$, dagegen für das Gebiet, das aus dem Innern zweier einander rechtwinkelig schneidender Kreise der Radien r_1, r_2 besteht, $\tau_n > \varrho = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$.

§ 4. Koeffizientenabschätzung bei konformer Abbildung. Verzerrungssätze[2]).

Neben den Tschebyscheffschen Polynomen $T_n(x)$ betrachten wir andere

35) $$L_n(x) = x^n + l_{n-1}^{(n)} x^{n-1} + \cdots + l_0^{(n)},$$

[1]) Vgl. meine Abhandlung im 150. Bande des Crelleschen Journals, S. 84–86.

[2]) Wenn auch die in diesem Paragraphen bewiesenen Sätze nur zum geringsten Teil neu sind (vgl. die S. 1 angeführten Abhandlungen und zwar deren erste zu Satz II, III, IV, die zweite zu Satz IX, XI, die dritte zu Satz V, VI, X), so scheint mir doch das Beweisverfahren neu und mitteilenswert zu sein.

deren Nullstellen alle auf Γ liegen und deren Betrag auf Γ einen möglichst kleinen Maximalwert $\chi_n^n (\geq \tau_n^n)$ annimmt. Aus (8), (31) folgt sofort:

$$\lim_{n\to\infty} \chi_n = \varrho. \tag{36}$$

Den durch Gleichung (36) formulierten Satz kann man auch so aussprechen:

Das logarithmische Potential einer stetigen von der Robinschen verschiedenen Belegung, welches der Bedingung (2) genügt, nimmt auf der belegten Kurve Γ einen Maximalwert an, der $> ln\, \varrho(\Gamma)$ ist; man kann hinzufügen: und einen Minimalwert $< ln\, \varrho(\Gamma)$ (vgl. S. 98/99 meiner S. 56 angeführten Abhandlung).

Aus Gleichung (36) ergibt sich auch ein sehr einfacher Beweis des folgenden Satzes[1]):

I. Wenn es innerhalb oder auf Γ zwei Punkte P_1, P_2 mit der Entfernung $P_1 P_2 = 4$ gibt, und wenn Γ nicht aus der doppelt zählenden Strecke $P_1 P_2$ besteht, so ist $\varrho(\Gamma) > 1$.

Es möge vorausgesetzt werden, daß die beiden Punkte P_1, P_2 auf Γ liegen, daß ihre Entfernung gleich 4 sei und daß es auf Γ keine zwei Punkte mit größerer Entfernung von einander gibt. Die doppelt zählende Strecke $P_1 P_2$ soll Γ' heißen; $x_1, x_2, \cdots x_k$ sollen die gleiche Bedeutung wie in (4) haben. Die Behauptung lautet dann

$$\varrho(\Gamma) > \varrho(\Gamma') (= 1). \tag{37}$$

Zum Beweise projiziere man die Punkte $x_1, x_2, \cdots x_k$ als $x_1', x_2', \cdots x_k'$ senkrecht auf Γ'; ferner sei x irgend ein weiterer Punkt von Γ, x' seine Projektion auf Γ'. Dann gilt, falls Γ als nicht mit Γ' identisch vorausgesetzt wird, mit beliebigen

[1]) Ich benutze diese Gelegenheit, um einen sinnstörenden Druckfehler in einer dem gleichen Satze gewidmeten Note (diese Berichte 1916, S. 39) zu verbessern: in Gleichung (1) daselbst ist der Faktor a_1 durch 1 zu ersetzen.

positiven ganzzahligen Exponenten $\nu_1, \nu_2, \cdots \nu_k$, sofern nur die x_i dicht genug auf Γ liegen:

38) $$|x-x_1|^{\nu_1}|x-x_2|^{\nu_2}\cdots|x-x_k|^{\nu_k} > |x'-x_1'|^{\nu_1}\cdots|x'-x_k'|^{\nu_k},$$

das heißt

39) $$\chi_n(\Gamma) > \chi_n(\Gamma').$$

Da $\varrho(\Gamma') = 1$ ist, folgt aus (36), (39):

40) $$\varrho(\Gamma) \geq 1.$$

Man sieht aber unmittelbar ein, daß hier das Zeichen $=$ nicht gelten kann, weil einerseits die Robinsche Belegung von Γ nur an Ausnahmestellen Null und andrerseits die Länge von Γ größer als die von Γ' ist[1]).

Mit ganz ähnlichen Überlegungen läßt sich auch folgender Satz beweisen:

II. Hat die Robinsche Belegung einer Kurve Γ ihren Schwerpunkt im Nullpunkt und ist $\varrho(\Gamma) = 1$, oder (was dasselbe heißt): wird durch

41) $$x = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots$$

das Gebiet $|z| > 1$ auf das Äußere Γ_a einer Kurve Γ der x-Ebene abgebildet, so liegt Γ völlig innerhalb des Kreisgebietes $|x| < 2$, außer wenn Γ aus einer doppelt zählenden im Nullpunkt halbierten Strecke der Länge 4 besteht.

Beweis: Es sei $\varrho(\Gamma) = 1$ und der Schwerpunkt der Robinschen Belegung sei der Nullpunkt. Auf dem Kreise $|x| = k$ liege der Punkt P von Γ; außerhalb aber dieses Kreises gebe es keine Punkte von Γ. Für die von Γ ab-

[1]) Man kann, indem man auch die Belegungen $\mu(x)|dx|$ von Γ auf Γ' projiziert, auch so schließen: Der Maximalwert des Potentials $\int_{\Gamma'} \mu(x) \ln|x-x'| \left|\frac{dx}{dx'}\right| |dx'|$ auf Γ' ist einerseits $\geq \ln \varrho(\Gamma')$ andrerseits $< \ln \varrho(\Gamma)$, also ist $\varrho(\Gamma) > \varrho(\Gamma') = 1$.

hängige Zahl k gibt es nach dem vorigen Satze eine obere Grenze $g\,(<4)$ und auf Grund bekannter Überlegungen ersieht man, daß es Kurven Γ gibt, für die $k=g$ ist. Es werde also angenommen, daß $OP=g$ ist. Bestünde nun Γ nicht aus einer doppelt zählenden Strecke, so würde man die Robinsche Belegung $\mu(x)\,|dx|$ jedes Bogenelements von Γ samt diesem Element auf die Strecke OP und ihre Verlängerung über O hinaus senkrecht projizieren; man würde so auf einer Strecke QP eine der Bedingung (2) genügende Belegung erhalten, deren Schwerpunkt der Nullpunkt ist und deren logarithmisches Potential auf QP einen Maximalwert $<ln\,\varrho\,(\Gamma)$, also <0 annehmen würde. Man könnte also nach dem Verfahren, das von (1) zu (8) führte, ein Polynom $g(x)=x^n+h_2x^{n-2}+\cdots+h_n$ bilden, dessen Nullstellen sämtlich auf QP liegen und dessen Maximalwert auf $QP<1$ wäre. Die Lemniskate, deren Gleichung $|g(x)|=1$ ist und deren Äußeres durch $z^n=g(x)$ auf das Gebiet $|z|>1$ abgebildet wird, würde auf ihrer Begrenzung einen Punkt P' enthalten, dessen Entfernung OP' von $O>g$ wäre, was der Voraussetzung, g sei die obere Grenze solcher Entfernungen, widerspricht. Aus dem bewiesenen Satze ergibt sich ohne weiteres der folgende:

III. Bildet die Funktion (12) das Gebiet $|z|>1$ schlicht ab und ergibt sich für keinen dieser z-Werte $x=0$, so ist $|a_0|\leq 2$; das Zeichen $=$ gilt nur, wenn das Bild des Kreises $|z|=1$ eine doppelt zählende Strecke der Länge 4 ist, deren einer Endpunkt der Punkt $x=0$ ist.

Und hieraus mittels der Substitution

42) $$u=\frac{1}{x},\quad v=\frac{1}{z}:$$

IV. Bildet die Funktion

43) $$u=v+a_2v^2+a_3v^3+\cdots$$

das Gebiet $|v|<1$ schlicht ab, so ist $|a_2|\leq 2$; das Zeichen $=$ gilt nur, wenn das Bild des Kreises $|v|=1$

ein doppelt zählender Strahl ist, der die Verlängerung eines Halbmessers des Kreises $|u| = \frac{1}{4}$ bildet.

Genau mit den nämlichen Uberlegungen wie den Satz II beweist man folgende Verallgemeinerung:

V. Bildet die Funktion (41) das Gebiet $|z| > 1$ schlicht ab, so liegt das Bild des Kreises $|z| = \varrho\ (> 1)$ ganz innerhalb des Kreises $|x| = \varrho + \frac{1}{\varrho}$ und berührt diesen nun, falls das Bild des Kreises $|z| = 1$ eine doppelt zählende Strecke der Länge 4 ist.

Hieraus folgt weiter:

VI. Bildet die Funktion (12) das Gebiet $|z| > 1$ schlicht ab und ergibt sich für keinen dieser z-Werte $x = 0$, so gilt für alle Bildpunkte x des Kreises $|z| = \varrho$ (> 1): $|x| \leq 2 + \varrho + \frac{1}{\varrho}$, wobei das Zeichen $=$ nur in dem bei Satz III erwähnten Ausnahmefall gilt.

VII. Bildet die Funktion (43) das Gebiet $|v| < 1$ schlicht ab, so gilt für alle Bildpunkte u des Kreises $|v| = \varrho\ (\leq 1)$: $|u| \geq \frac{\varrho}{(1+\varrho)^2}$, wobei das Zeichen $=$ nur in dem bei Satz IV erwähnten Ausnahmefall gilt.

Bezeichnet man immer unter der Voraussetzung, daß die Funktion (41) das Gebiet $|z| > 1$ schlicht abbilde mit Γ_ϱ, $\Gamma_{\varrho'}$ die Bilder der Kreise $|z| = \varrho\ (> 1)$ und $|z| = \varrho' > \varrho$, so gibt es offenbar eine untere Grenze $k(\varrho, \varrho')$ für das Minimum der Entfernung zweier Punkte P, P', von denen der eine auf Γ_ϱ, der andere auf $\Gamma_{\varrho'}$ liegt, und diese untere Grenze ist ein erreichbares Minimum. Es werde also angenommen, daß P auf Γ_ϱ, P' auf $\Gamma_{\varrho'}$ liege und daß die Entfernung $PP' = k(\varrho, \varrho')$ sei. Auf die Halbgerade $P'P\,\infty$ projiziere man mittels Kreisbögen um P' die Bogenelemente $|d\bar{x}|$ der Kurve $\Gamma\,(= \Gamma_1)$ samt ihren Robinschen Belegungen $\mu(x)\,|d\bar{x}|$. Man erhält so auf einer Strecke h' eine der Bedingung (2) genügende Be-

legung, deren Potential $w(\xi, \eta) = \int_{h'} \mu(x) \left| \frac{dx}{dx'} \right| ln|x - \bar{x}'| \, |dx'$ in P' den nämlichen Wert $ln\, \varrho'$ annimmt wie das ursprüngliche Potential $u(\xi, \eta)$ (1) der Belegung von Γ; dagegen ist, falls Γ als nicht aus einer doppelt zählenden Strecke der Länge 4 bestehend vorausgesetzt wird, im Punkte $P: w(\xi, \eta) < u(\xi, \eta) = ln\, \varrho$, weil dann für die Punkte x der Strecke PP': $ln|x - \bar{x}'|$ im allgemeinen $<$ und niemals $> ln|x - \bar{x}|$ ist. Es gibt somit zwischen P und P' einen (von P und P' verschiedenen) Punkt P'', an dem $w(\xi, \eta) = ln\, \varrho$ wird. Nun ist für alle Punkte der Strecke h' offenbar $w(\xi, \eta) < 1$, denn der Maximalwert des Potentials w auf h' ist kleiner als der konstante Wert 1 des Potentials u auf Γ, wieder weil im allgemeinen $ln|x - \bar{x}' < ln|x - x|$ ist. Daraus folgt, daß die Kurve Γ', deren Gleichung $w(\xi, \eta) = 1$ ist, aus einem geschlossenen Zuge besteht und doppelpunktlos[1]) ist. Zu Γ' gehören die Kurven Γ'_ϱ und $\Gamma'_{\varrho'}$, wie zu Γ die Kurven Γ_ϱ und $\Gamma_{\varrho'}$ gehören. Man ersieht danach, daß unsere Annahme, Γ bestehe nicht aus einer doppelt zählenden Strecke der Länge 4, wegen $P'P'' < P'P$ im Widerspruch steht mit der Voraussetzung, $k(\varrho, \varrho')$ sei die untere Grenze solcher Entfernungen. Das ergibt folgenden Satz:

VIII. Bildet die Funktion (12) das Gebiet $|z| > 1$ schlicht ab, so haben die Bilder der Kurven $|z| = \varrho$ (≥ 1) und $|z| = \varrho' > \varrho$ überall einen Abstand $\geq \varrho' + \frac{1}{\varrho'} - \varrho - \frac{1}{\varrho}$ und $\leq \varrho' + \frac{1}{\varrho'} + \varrho + \frac{1}{\varrho}$ (wie man wegen V hinzufügen kann). Über das Gleichheitszeichen gilt das bei Satz V Bemerkte.

[1]) In einem Doppelpunkt einer Kurve $w(\xi, \eta) =$ konst. erleidet nämlich ein Massenpunkt keine Anziehung durch die auf h' verteilte Masse (wenn die anziehende Kraft umgekehrt proportional der Entfernung angenommen wird). Somit können außerhalb der Strecke h' und um so mehr im Gebiete $w(\xi, \eta) > 1$ keine Doppelpunkte von Kurven $w(\xi, \eta) =$ konst. liegen.

Insbesondere ergibt sich hieraus für $\varrho = 1$ nach der Transformation (42):

IX. In Satz VII kann ohne sonstige Änderung die Aussage $u > \frac{\varrho}{(1+\varrho)^2}$ durch $u < \frac{\varrho}{(1-\varrho)^2}$ ersetzt werden.

Aus VIII folgt weiter für $\lim \varrho' = \varrho$:

X. Bildet die Funktion (12) das Gebiet $|z| > 1$ schlicht ab, so gilt für alle $|z| = \varrho\,(>1)$: $\left|\frac{dx}{dz}\right| > 1 - \frac{1}{\varrho^2}$.

Ferner mit Rücksicht auf VII:

XI. Bildet die Funktion (43) das Gebiet $|v| < 1$ schlicht ab, so gilt für alle $|v| = \varrho\,(<1)$: $\frac{du}{dv} \geq \frac{1-\varrho}{(1+\varrho)^3}$.

§ 5. Die Blasiusschen Formeln und der Kutta-Joukowskysche Satz[1]).

Da ein Teil der vorausgehenden Ansätze für die Theorie des Flugs wichtig geworden sind, möge zum Schluß noch eine, wie mir scheint, besonders einfache Ableitung der Blasiusschen Formeln und des Kutta-Joukowskyschen Satzes Platz finden. Ein unendlich langer Kreiszylinder, dessen Grundkreis in der komplexen z-Ebene die Gleichung $|z| = \varrho$ haben möge, werde in einer Flüssigkeitsströmung festgehalten, die in allen Parallel-Ebenen zur z-Ebene die nämliche ist und die im Unendlichen den Charakter einer Parallelströmung unter dem Winkel $-\alpha$ gegen die reelle Achse hat. Dann ist das Geschwindigkeits-Potential gleich dem Realteil der folgenden Funktion[2])

$$44) \qquad f(z) = -u\left(e^{i\alpha}z + \frac{e^{-i\alpha}\varrho^2}{z}\right) - \frac{Ji}{2\pi}\ln z;$$

(u ist der Betrag der Geschwindigkeit im Unendlichen, J die

[1]) Vgl. für das folgende v. Mises, Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt 1917, Heft 21/22.

[2]) Vgl. Lamb, Hydrodynamik, Leipzig 1907, S. 92.

Konstante der Zirkulation um den Zylinder). Ersetzt man nun den kreisförmigen Querschnitt durch einen anderen I' (in der $x = \xi + i\eta$-Ebene), ohne sonst an den Bedingungen der Aufgabe etwas zu ändern, so hat man als Geschwindigkeitspotential den Realteil $\Phi(\xi, \eta)$ der Funktion

$$45) \qquad F(x) = f(z(x)) = \Phi(\xi, \eta) + i\,\Psi(\xi, \eta)$$

zu wählen, wobei $z(x)$ die Funktion (12) ist.

Der Druck, der von der Strömung auf das Zylinderstück, das sich über dem Bogenelement ds des Profils I' erhebt, ausgeübt wird, hat nach dem Bernoullischen Theorem die Komponenten:

in der ξ-Richtung: $-\frac{\delta}{2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial s}\right)^2 \cos(n, \xi)\, ds = \frac{\delta}{2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial s}\right)^2 d\eta$,

„ „ η- „ : $-\frac{\delta}{2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial s}\right)^2 \cos(n, \eta)\, ds = -\frac{\delta}{2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial s}\right)^2 d\xi$;

δ ist die Dichte der Flüssigkeit.

Bezeichnet man mit P_ξ, P_η die Komponenten der von der Flüssigkeit auf den Zylinder ausgeübten Gesamtkraft und mit M deren Moment bezüglich des Nullpunkts, so erhält man

$$46) \qquad \begin{aligned} P_\eta + i\,P_\xi &= -\frac{\delta}{2}\int_{+I}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial s}\right)^2 (d\xi - i\,d\eta) \\ &= -\frac{\delta}{2}\int_{+I}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial s} + i\,\frac{\partial \Psi}{\partial s}\right)^2 (d\xi - i\,d\eta), \end{aligned}$$

da ja

$$\frac{\partial \Psi}{\partial s} = \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$$

ist. Nun ist $ds^2 = (d\xi + i\,d\eta)(d\xi - i\,d\eta)$, also

$$47) \qquad P_\eta + i\,P_\xi = -\frac{\delta}{2}\int_{+I}\left(\frac{dF(x)}{dx}\right)^2 dx.$$

Multipliziert man unter den Integralzeichen in (46) und (47) noch mit $\xi + i\eta$, so ergibt sich ebenso

$$48) \qquad M = -\frac{\delta}{2}\,\Re\int_{+I} x\left(\frac{dF(x)}{dx}\right)^2 dx.$$

(47) und (48) sind die beiden Blasiusschen Formeln[1]).

Führt man in (47) die Veränderliche z mittels (11) ein, so findet man:

$$49) \quad P_\eta + i P_\xi = -\frac{\delta}{2} \int_{+\Gamma} \left[-u \left(e^{i\alpha} - \frac{e^{-i\alpha} \varrho^2}{z^2} \right) - \frac{J i}{2\pi} \frac{1}{z} \right]^2 \left(1 - \frac{a_1}{z^2} - \frac{2 a_2}{z^3} - \cdots \right) dz = \delta u J e^{i\alpha}$$

(nach dem Cauchyschen Integralsatz); das ist der Kutta-Joukowskysche Satz.

---

[1]) Zeitschr. für Math. u. Phys., Bd. 58 (1910), S. 93 und 96.

Die elementare Theorie der analytischen Funktionen und die komplexe Integration.

Von **Adolf Kneser** in Breslau.

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 7. Februar 1920.

Weierstraß hat in seinen Vorlesungen die Theorie der analytischen Funktionen entwickelt, ohne von der Integration im komplexen Gebiet Gebrauch zu machen; indem er die Potenzreihe als Grundelement der Untersuchung nimmt, führt er die Funktionentheorie zum großen Teil in eine Art algebraischer Analysis über. Dabei gehen als Preis für die Reinheit der Methode die bedeutenden Vorteile verloren, die die komplexe Integration als Hilfsmittel der Untersuchung und des Beweises darbietet, und zwar nicht nur bei der Anwendung, sondern auch in der allgemeinen Theorie. Berechtigt und naheliegend erscheint daher die Frage, ob man die komplexe Integration irgendwie der Weierstraßischen Funktionentheorie einordnen kann, ohne deren Charakter zu zerstören. Diese Frage wird besonders dadurch nahegelegt, daß es in der Vorlesung von Weierstraß eine Stelle gibt, an der wohl jeder Mathematiker ein Ersatzmittel für die komplexe Integration erblicken wird, nämlich beim Beweis des Satzes, daß die Koeffizienten einer Potenzreihe $\mathfrak{P}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$

die Ungleichung

$$|a_n| < g r^{-n}$$

erfüllen, wenn die Reihe auf der Kreislinie

$$|x| = r,$$

die dem Innern des Konvergenzgebietes angehört, die Ungleichung

$$|\mathfrak{P}(x)| < g$$

erfüllt[1]). Hier findet sich eine übrigens schon in der älteren Literatur begegnende Betrachtung über den Durchschnittswert der Reihe $\mathfrak{P}(x)$ auf dem Kreise $|x| = r$, die aus der sonstigen Weierstraßischen Methode einigermaßen herausfällt. Diese Durchschnittsbildung ist von Herrn Pringsheim[2]) wesentlich vervollkommnet und bezüglich der algebraischen Hilfsmittel noch elementarer gestaltet, als sie bei Weierstraß vorliegt; mit ihrer Hilfe beweist Herr Pringsheim verschiedene Hauptsätze der allgemeinen Funktionentheorie, insbesondere den Laurentschen weit einfacher, als es bis dahin mit den Weierstraßischen Hilfsmitteln gelungen war.

Denselben Zielen kann man aber auch nachstreben, indem man davon ausgeht, daß die komplexe Integration in gewissem Sinne der elementaren d. h. Weierstraßischen Funktionentheorie überhaupt nicht fremd ist. Die Differentiation und Integration werden algebraisch eingeführt, und zwar beim Beweis der Taylorschen Formel

$$\mathfrak{P}(x) = \mathfrak{P}(a) + (x - a)\,\mathfrak{P}'(a) + \cdots,$$

indem einfach als Definition der Ableitung die Gleichung

$$\mathfrak{P}'(x) = a_1 + 2\,a_2\,x^2 + \cdots$$

angesetzt wird, woraus sich die Definition des Integrals der Reihe $\mathfrak{P}(x)$ durch die Gleichung

$$\mathfrak{Q}(x) = c + a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \cdots$$

mit konstantem c von selbst ergibt. Ist nun $\mathfrak{P}(x - a)$ irgend eine analytische Fortsetzung des Funktionselements $\mathfrak{P}(x)$ und $\bar{\mathfrak{Q}}(x - a)$ das Integral von $\bar{\mathfrak{P}}(x - a)$, so ist bei passender Wahl der Integrationskonstanten $\bar{\mathfrak{Q}}(x - a)$ die Fortsetzung

[1]) Weierstraß Werke, Bd. 2, S. 224.

[2]) Über Vereinfachungen in der elementaren Theorie der analytischen Funktionen. Math. Annalen, Bd. 47, S. 121 (1895).

des Elements $\mathfrak{Q}(x)$. Die Integration auf einem gewissen Wege ist also vollständig bestimmt, wenn es feststeht, was es heißt und daß es möglich ist, ein Funktionselement auf eben diesem Wege analytisch fortzusetzen. Integration und Fortsetzung erfolgen im Grunde nicht längs einer Linie, sondern längs eines Streifens, längs dessen man eine endliche Anzahl von Übergängen vornimmt wie von den Reihen $\mathfrak{P}(x)$ und $\mathfrak{Q}(x)$ zu den Reihen $\overline{\mathfrak{P}}(x-a)$ und $\overline{\mathfrak{Q}}(x-a)$. Der Satz, daß das Integral einer analytischen Funktion über den Umfang eines einfach zusammenhängenden Gebiets, auf dem die Funktion regulär ist, verschwindet, kann mit denselben Worten bewiesen werden wie der folgende grundlegende Satz der Weierstraßischen Funktionentheorie: Kann man ein Funktionselement auf jedem innerhalb eines einfach zusammenhängenden Gebiets verlaufenden Wege analytisch fortsetzen, so ist die Funktion, die das Element definiert, in dem Gebiet eindeutig. Dieser Satz ist von Herrn Pringsheim[1]) elementar bewiesen worden.

Durch diese naheliegenden Erwägungen wird zwar die Integration im komplexen Gebiet der Weierstraßischen Theorie bis zu einem gewissen Grade eingeordnet; doch fehlen im Kreise der elementar formulierten und bewiesenen Sätze noch zwei Eigenschaften des komplexen Integrals, auf denen seine wichtigsten Anwendungen in der allgemeinen Funktionentheorie wie in der Integralrechnung beruhen: erstens die Abschätzung des Integrals aus der Länge der Integrationslinie und einer oberen Schranke des absoluten Betrages des Integranden; zweitens der Residuensatz, nach welchem das über eine geschlossene Linie erstreckte Integral einer stellenweise außerwesentlich singulären Funktion durch die Residuensumme ausgedrückt wird. Diese beiden Kernsätze der Cauchyschen Funktionentheorie wollen wir beweisen, indem wir nur Begriffe und Hilfsmittel anwenden, die im Sinne der von Herrn Pringsheim auf-

[1]) Über eine charakteristische Eigenschaft sogenannter Treppenpolygone und deren Anwendung auf einen Fundamentalsatz der Funktionentheorie. Münchener Sitzungsber. 1915, S. 27.

gestellten Forderungen elementar sind; insbesondere wird von algebraischen Hilfsmitteln nur die Quadratwurzel benutzt. Auf diese Weise wird die Weierstraßische Funktionentheorie in dem Sinne ergänzt, daß ihr die wichtigsten Anwendungen des komplexen Integrals eingegliedert werden können, ohne den elementaren Charakter zu verwischen. Man mag den Wert solcher methodischer Ergebnisse hoch oder niedrig anschlagen; jedenfalls liegen sie in der Richtung der von Weierstraß einmal[1]) ausgesprochenen Forderung, „daß die Funktionentheorie auf dem Fundament algebraischer Wahrheiten aufgebaut werden muß".

§ 1. Elementare Grenzprozesse.

Seien a und b irgend zwei komplexe Größen und sei bei reellen Werten von p, q, r

$$b \geq |a| > 0, \quad \frac{b}{a} = c = r(p + qi), \quad r > 0, \quad p^2 + q^2 = 1.$$

Sei ferner $\varepsilon = +1$, wenn $q \geq 0$; sonst sei $\varepsilon = -1$; jede Quadratwurzel werde positiv verstanden. Wir definieren dann zwei Größenreihen durch folgende Gleichungen:

$$p_1 = \varepsilon \sqrt{\frac{1+p}{2}}, \quad q_1 = \sqrt{\frac{1-p}{2}},$$

$$p_2 = \sqrt{\frac{1+p_1}{2}}, \quad q_2 = \sqrt{\frac{1-p_1}{2}};$$

weiter sei m eine ganze Zahl und $m > 1$; wir definieren dann allgemein

$$p_{m+1} = \sqrt{\frac{1+p_m}{2}}, \quad q_{m+1} = \sqrt{\frac{1-p_m}{2}}.$$

Ist nun zunächst c eine reelle positive Größe, so ist allgemein

$$p = 1, \quad q = 0, \quad p_1 = p_m = 1, \quad q_1 = q_m = 0.$$

---

[1]) Werke, Bd. 2, S. 235. Brief an Herrn Schwarz aus dem Jahre 1875.

Von diesem Falle abgesehen gelten folgende unmittelbar ersichtliche Beziehungen:

$$0 \leq p_1^2 < 1, \quad 0 < q_1 \leq 1, \quad 0 < p_m < 1, \quad 0 < q_m < 1,$$
$$2 p_1 q_1 = \varepsilon q = q, \quad p_1^2 - q_1^2 = p, \quad (p_1 + q_1 i)^2 = p + q i,$$
$$2 p_{m+1} q_{m+1} = q_m, \quad 2 q_{m+1} > q_m, \tag{1}$$
$$(p_{m+1} + i q_{m+1})^2 = p_m + i q_m, \quad (p_m + i q_m)^{2^m} = p + q i.$$

Setzen wir ferner

$$p'_m = \frac{q_m}{p_m},$$

so ist immer

$$p'_m > q_m \tag{2}$$

und gelten die Beziehungen

$$2 p'_{m+1} = \frac{2 q_{m+1}}{p_{m+1}} = \frac{q_m}{p_{m+1}^2} = p'_m \cdot \frac{p_m}{p_{m+1}^2} = p'_m \cdot \frac{2 p_m}{1 + p_m},$$
$$2 p'_{m+1} < p'_m. \tag{3}$$

Die drei Ungleichungen (1), (2), (3) ergeben nun, wenn s eine positive ganze Zahl ist,

$$p'_m > 2^s p'_{m+s} > 2^s q_{m+s} > q_m,$$
$$2^s q_{m+s} < 2^{s+1} q_{m+s+1}, \quad 2^s p'_{m+s} > 2^{s+1} p'_{m+s+1};$$

von den Größenreihen $2^m q_m$ und $2^m p'_m$ nimmt also bei wachsenden Werten von m die erste beständig zu, die zweite beständig ab; die Glieder beider Reihen bleiben dabei zwischen positiven Schranken. Es existieren also die positiven Grenzwerte

$$\lim_{m=\infty} 2^m q_m = A, \quad \lim_{m=\infty} 2^m p'_m = A';$$

daraus folgt weiter

$$\lim_{m=\infty} q_m = 0, \quad \lim_{m=\infty} p_m = 1, \quad \lim_{m=\infty} \frac{p'_m}{q_m} = 1, \tag{4}$$

und die letzte dieser Gleichungen ergibt, da A und A' positiv sind,

$$A = A'.$$

Wir bezeichnen diesen Grenzwert auch durch $A(p, q)$; da die Größen $2^m q_m$ mit m wachsen, gilt noch die Beziehung

$$2^m q_m < A(p, q). \tag{5}$$

Setzen wir jetzt

$$n = 2^m,$$

so ist $\sqrt[n]{r}$ durch m-fach wiederholte Quadratwurzelziehung zu gewinnen; nehmen wir, wie festgesetzt, jede Quadratwurzel positiv, so ist auch $\sqrt[n]{r}$ positiv. Da ferner nach unseren Voraussetzungen

$$r = 1 + \varrho, \quad \varrho > 0$$

und allgemein die Beziehungen

$$\left(1 + \frac{\varrho}{2}\right)^2 \geq 1 + \varrho, \quad \sqrt{1 + \varrho} \leq 1 + \frac{\varrho}{2}$$

gelten, so ergibt sich durch wiederholte Quadratwurzelziehung

$$\sqrt[n]{r} \leq 1 + \frac{\varrho}{n},$$

also

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{r} = 1.$$

Dieses Ergebnis führt in Verbindung mit den Gleichungen (4), wenn man

$$\gamma = \sqrt[n]{r}\,(p_m + i q_m) = \sqrt[n]{c}$$

setzt, zu der Folgerung

$$\lim_{n=\infty} \gamma = 1 \tag{6}$$

sowie zu der Einsicht, daß auch in dem Sonderfalle $p = 1$, $q = 0$, $c = r$ dieselbe Gleichung gilt.

Wir benutzen die erhaltenen Ergebnisse, um die Grenzwerte einiger Summen zu bestimmen, die mit den Größen

$$x_\nu = x_0 \gamma^\nu, \quad x_0 = a, \quad x_n = b \tag{7}$$

gebildet sind; wir beschränken uns dabei auf die Sonderfälle $p = 1$ und $r = 1$, d. h. die Fälle, daß das Verhältnis $b : a$ reell und positiv oder dem absoluten Betrage nach $= 1$ sei.

Sei erstens $p = 1$, also $\gamma = \sqrt[n]{r}$ und größer als Eins; wir bilden die Summe

$$\sum_{\nu}^{0,n-1} |x_{\nu+1} - x_\nu| = a \sum_{\nu}^{0,n-1} \gamma^\nu (\gamma - 1) = |a|(\gamma^n - 1) = |b| - |a| = |b - a|. \tag{8}$$

Sei zweitens $r = 1$, $|\gamma| = 1$ und γ von Eins verschieden; dann finden wir:

$$\sum_{\nu}^{0,n-1} |x_{\nu+1} - x_\nu| = |a| \sum_{\nu}^{0,n-1} |\gamma^\nu| \, |\gamma - 1| = n |a| \, |\gamma - 1|.$$

Nun ist

$$n(\gamma - 1) = 2^m (p_m - 1) + 2^m q_m i;$$

dabei ist nach unsern Definitionen

$$q_m^2 = 1 - p_m^2 > 1 - p_m,$$

$$2^m (1 - p_m) < \frac{(2^m q_m)^2}{2^m}, \quad \lim_{m=\infty} 2^m q_m = A(p, q);$$

also folgt

$$\lim_{m=\infty} 2^m (1 - p_m) = 0,$$

und weiter

$$\lim_{m=\infty} n(\gamma - 1) = i A(p, q), \tag{9}$$

also endlich, da A eine positive Größe ist,

$$\lim_{m=\infty} \sum_{\nu}^{0,n-1} |x_{\nu+1} - x_\nu| = a \, A(p, q);$$

die Ungleichung (5) gibt noch

$$\sum_{\nu}^{0,n-1} |x_{\nu+1} - x_\nu| < a |A(p, q). \tag{10}$$

Für eben diesen Fall $r = 1$, $p < 1$ läßt sich auch der Grenzwert der Summe

$$\sum_{\nu}^{0,n-1} \frac{x_{\nu+1} - x_\nu}{x_\nu} = \sum_{\nu}^{0,n-1} \frac{\gamma^{\nu+1} - \gamma^\nu}{\gamma^\nu} = n(\gamma - 1)$$

sofort angeben; die Gleichung (9) gibt

$$\lim_{m=\infty} \sum_{\nu}^{0,n-1} \frac{x_{\nu+1} - x_\nu}{x_\nu} = i\,A(p,q). \tag{11}$$

Endlich bilden wir noch, unter k eine positive ganze Zahl verstehend, den Grenzwert der Summe

$$\sum_{\nu}^{0,n-1} (x_{\nu+1} - x_\nu)\, x_\nu^k$$

und zwar bei beliebigen Werten des Quotienten $b:a$, d. h. gleichviel, welchen von Null verschiedenen Wert die Größe γ hat; wir finden aus den Gleichungen (7)

$$\sum_{\nu}^{0,n-1} (x_{\nu+1} - x_\nu)\, x_\nu^k = a^{k+1}(\gamma-1) \sum_{\nu}^{0,n-1} \gamma^{\nu k+\nu} = a^{k+1}(\gamma-1) \cdot \frac{\gamma^{n(k+1)}-1}{\gamma^{k+1}-1}$$

$$= \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{1 + \gamma + \gamma^2 + \cdots + \gamma^k}.$$

Nun gilt die Gleichung (6) allgemein; also folgt

$$\lim_{m=\infty} \sum_{\nu}^{0,n-1} (x_{\nu+1} - x_\nu)\, x^k = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}. \tag{12}$$

Diese Rechnung wird von Dirichlet benutzt, um das bestimmte Integral einer Potenz aus dem Begriff des Integrals als Grenzwertes einer Summe herzuleiten, ohne Rückgang auf das unbestimmte Integral[1]).

§ 2. Abschätzung der Integrale von Polynomen und Potenzreihen.

Die Gleichung (12) ergibt unmittelbar, wenn

$$P(x) = \sum_{\nu}^{0,s} a_\nu\, x^\nu$$

ein beliebiges Polynom, c eine Konstante ist und

$$Q(x) = c + \sum_{\nu}^{0,s} \frac{a_\nu\, x^{\nu+1}}{\nu+1}$$

gesetzt wird,

$$Q(b) - Q(a) = \lim_{m=\infty} \sum_{\nu}^{0,n-1} (x_{\nu+1} - x_\nu)\, P(x_\nu). \tag{13}$$

[1]) Vorlesungen über bestimmte Integrale, herausgegeben von Arendt, S. 19 (Braunschweig 1904).

Diese Formel gilt ebenso allgemein wie die Gleichung (12) und gibt den Zusammenhang zwischen unbestimmter und bestimmter Integration eines Polynoms, wobei von a bis b längs einer logarithmischen Spirale integriert wird, die aber auch in eine Gerade oder einen Kreis ausarten kann.

Nehmen wir an, das Verhältnis $b:a$ sei reell und positiv, so ist auch γ reell, und die Punkte x_ν liegen in der Ebene der komplexen Zahlen auf der geraden Strecke, die a und b verbindet. Alsdann gilt die Gleichung (8), und wenn auf der bezeichneten Strecke die Ungleichung

$$|P(x)| < g \tag{14}$$

besteht, so folgt

$$Q(b) - Q(a) < b - a\ g. \tag{15}$$

Die Voraussetzung, die bisher gilt, daß die Punkte 0, a, b in dieser Folge auf einer Geraden liegen, kann aber fallen gelassen werden. Denn setzen wir mit einer beliebigen Konstanten ξ etwa

$$x = \xi + \bar{x},\ P(x) = P(\bar{x}),\ Q(x) = \bar{Q}(\bar{x}),\ b = \xi + b,\ a = \xi + a,$$

so ist $P(\bar{x})$ ein ebenso allgemeines Polynom wie $P(x)$; in der x-Ebene gilt die Ungleichung

$$|P(\bar{x})| < g$$

auf der geraden Strecke, die die Punkte a und b verbindet, die aber nicht mehr durch den Punkt $\bar{x} = 0$ zu gehen braucht, und da offenbar

$$b - a = b - a$$

ist, so folgt aus der Ungleichung (15)

$$|Q(b) - Q(\bar{a})| < |b - a\ g.$$

Damit ist die Ungleichung (15) in dem bezeichneten allgemeineren Sinne bewiesen; sie gilt bei beliebiger Lage der Stellen a und b, wenn auf der Verbindungsstrecke derselben die Voraussetzung (14) gilt, und die Form des Ergebnisses

zeigt, daß es gleichgültig ist, welche der Größen $|a|$ und $|b|$ die größere ist oder ob beide gleich sind.

Jetzt sei $P(x)$ bei verschiedenen Werten der Gradzahl s ein Abschnitt der Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{\nu}^{0,\infty} a_\nu x^\nu = P(x) + R(x);$$

sei ferner

$$\mathfrak{Q}(x) = c + \sum_{\nu}^{0,\infty} \frac{a_\nu x^{\nu+1}}{\nu+1} = Q(x) + S(x);$$

die Reihen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ seien regulär und also gleichmäßig konvergent auf dem Gebiete

$$|x| \leq r, \tag{16}$$

dem auch die Werte a und b angehören mögen; auf der geraden Strecke, die a und b verbindet, sei

$$|\mathfrak{P}(x)| < G.$$

Ist dann ε eine beliebig klein gewählte positive Größe, so kann man s so groß wählen, daß bei der Annahme (16) immer

$$|R(x)| < \varepsilon, \quad |S(x)| < \varepsilon, \tag{17}$$

mithin auf der geraden Strecke, die a und b verbindet,

$$|P(x)| < G + \varepsilon.$$

Dann lehrt die Ungleichung (15)

$$|Q(b) - Q(a)| < |b - a|\,(G + \varepsilon)$$

oder

$$|\mathfrak{Q}(b) - \mathfrak{Q}(a) - (S(b) - S(a))| < |b - a|\,(G + \varepsilon);$$

da nun die zweite Ungleichung (17) ergibt

$$|S(b) - S(a)| < 2\varepsilon,$$

so folgt

$$|\mathfrak{Q}(b) - \mathfrak{Q}(a)| - 2\varepsilon < |b - a|\,(G + \varepsilon),$$

und da in dieser Ungleichung die von dem Buchstaben ε freien Glieder auch von ε unabhängige Größen bedeuten, so folgt

$$|\mathfrak{Q}(b) - \mathfrak{Q}(a)| \leq G|b - a|. \tag{18}$$

Jetzt sei $f(x)$ eine analytische Funktion und werde durch die Stellen $c_0, c_1, \ldots, c_k$ hin fortgesetzt; d. h. sie werde in der Umgebung der Stelle c_ν durch eine Potenzreihe $\mathfrak{P}_\nu(x - c_\nu)$ dargestellt, deren Konvergenzbereich die Stelle $c_{\nu+1}$ in seinem Innern enthält. Stehen ferner die Reihen $\mathfrak{Q}_\nu$ zu $\mathfrak{P}_\nu$ in derselben Beziehung wie bisher schon $\mathfrak{Q}$ zu $\mathfrak{P}$, so daß die Konvergenzbereiche der Reihen $\mathfrak{P}_\nu$ und $\mathfrak{Q}_\nu$ übereinstimmen, und werden die konstanten Glieder der Reihen $\mathfrak{Q}_\nu$ immer so bestimmt, daß

$$\mathfrak{Q}_{\nu+1}(0) = \mathfrak{Q}_\nu(c_{\nu+1} - c_\nu), \tag{19}$$

so sind auch die Reihen $\mathfrak{Q}_\nu(x - c_\nu)$ analytische Fortsetzungen voneinander und Elemente einer analytischen Funktion $F(x)$. Die Größe

$$F(c_k) - F(c_0) = \mathfrak{Q}_k(0) - \mathfrak{Q}_0(0)$$

ist das im Weierstraßischen Sinne definierte Integral der Funktion $f(x)$, von c_0 bis c_k gebildet längs irgend einer Linie $\mathfrak{L}$, die die Punkte c_ν enthält und ganz im Innern des Gebiets liegt, das von den Konvergenzbereichen der Reihen $\mathfrak{P}_\nu$ bedeckt wird, und der Gleichung (19) zufolge kann man schreiben

$$F(c_k) - F(c_0) = \int_{c_0}^{c_k} f(x)\,dx = \mathfrak{Q}_k(0) - \mathfrak{Q}_0(0)$$
$$= \sum_{\nu}^{0,k-1} \{\mathfrak{Q}_{\nu+1}(0) - \mathfrak{Q}_\nu(0)\} = \sum_{\nu}^{0,k-1} \{\mathfrak{Q}_\nu(c_{\nu+1} - c_\nu) - \mathfrak{Q}_\nu(0)\}.$$

Auf die Glieder des letzten Ausdrucks wenden wir die Ungleichung (18) an, indem wir voraussetzen, daß auf der polygonalen Linie, die die Stellen c_ν in der Reihenfolge ihrer Zeiger verbindet, die Ungleichung

$$|f(x)| < G$$

gelte; das ist sicher, wenn wir weiter annehmen, diese Ungleichung gelte in einem die polygonale Linie umfassenden Gebiet $\mathfrak{G}$, in welchem $f(x)$ auch regulär sei. Dann finden wir der Beziehung (18) zufolge

$$\mathfrak{Q}_\nu(c_{\nu+1} - c_\nu) - \mathfrak{Q}_\nu(0)| \leqq |c_{\nu+1} - c_\nu| G,$$

$$|F(c_k) - F(c_0)| \leqq \sum_{\nu}^{0,k-1} |\mathfrak{Q}_\nu(c_{\nu+1} - c_\nu) - \mathfrak{Q}_\nu(0)|,$$

$$|F(c_k) - F(c_0)| \leqq G \sum_{\nu}^{0,k-1} |c_{\nu+1} - c_\nu|.$$

Hat die Integrationslinie $\mathfrak{L}$ eine Länge l, und liegt sie im Gebiet $\mathfrak{G}$, so ist jedenfalls

$$\sum_{\nu}^{0,k-1} |c_{\nu+1} - c_\nu| < l,$$

und das erhaltene Ergebnis kann in die gewöhnliche Form

$$\left| \int_{c_0}^{c_k} f(x)\, dx \right| < Gl$$

gebracht werden. Hiermit ist unser erstes Ziel erreicht.

§ 3. Der Residuensatz.

Der zweite auf Integration im komplexen Gebiete bezügliche Satz, den wir im Rahmen der elementaren Funktionentheorie beweisen wollen, sagt aus, daß man um eine außerwesentlich singuläre Stelle einer analytischen Funktion in hinreichender Nähe der Stelle herum integrierend als Wert des Integrals das mit $2\pi i$ multiplizierte Residuum der Stelle erhält. Sei etwa $x = 0$ die singuläre Stelle, und zwar ein Pol von der Ordnung h, in dessen Umgebung die betrachtete Funktion in der Form

$$f(x) = \sum_{\nu}^{-h,+\infty} a_\nu x^\nu$$

darstellbar sei. Wir beschränken die Untersuchung auf das Innere des Konvergenzbereichs dieser Reihe. Dann hat die Funktion

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{a_{-1}}{x}$$

ein in der Umgebung der Stelle $x = 0$ eindeutiges Integral; d. h. setzt man

$$\Phi(x) = \sum_{\nu}^{-h,-2} \frac{a_\nu x^{\nu+1}}{\nu+1} + \sum_{\nu}^{0,\infty} \frac{a_\nu x^{\nu+1}}{\nu+1},$$

so ist offenbar

$$\Phi'(x) = \varphi(x),$$

und wenn man um die Stelle $x = 0$ herum integriert, hat man

$$\int \varphi(x)\, dx = 0$$

zu setzen, eine Gleichung, die nach der oben gegebenen Definition des Integrals auch in der elementaren Funktionentheorie ihren wohlbestimmten Sinn hat. In demselben Sinne findet man also

$$\int f(x)\, dx = \int \varphi(x)\, dx + a_{-1} \int \frac{dx}{x} = a_{-1} \int \frac{dx}{x},$$

und das letzte Integral ist auszurechnen. Will man seinen Wert nicht aus der Theorie der Exponentialfunktion ableiten, so kann man folgendermaßen verfahren.

Wir wenden die Gleichung (13) des § 2,

$$Q(b) - Q(a) = \lim_{m=\infty} \sum_{\nu}^{0,n-1} (x_{\nu+1} - x_\nu)\, P(x_\nu), \tag{20}$$

in der $P(x)$ ein Polynom und Q sein unbestimmtes Integral ist, jetzt auf den Fall $r = 1$ an, so daß die Gleichungen

$$x_\nu = a\gamma^\nu,\ \gamma = p_m + iq_m,\ |b| = |a|,\ b = a(p + qi) = x_n$$

gelten. Dabei sei $P(x)$ ein Abschnitt der Potenzreihe, die die Funktion $1 : x$ in der Umgebung der Stelle $x = a$ darstellt, also

$$P(x) = \frac{1}{a} - \frac{x-a}{a^2} + \frac{(x-a)^2}{a^3} - \cdots \pm \frac{(x-a)^s}{a^{s+1}},$$

und es sei speziell

$$b = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\, a, \quad p = q = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

gesetzt, so daß die Stellen a und b auf dem Kreise $|x| = a$

einen Winkelabstand von 45^0 haben und ihr gerader Abstand kleiner als $|a|$ ist. Man kann nun s so groß wählen, daß im Innern eines Kreises $\mathfrak{K}$ mit dem Mittelpunkte a, der den Punkt $x = 0$ ausschließt, den Punkt $x = b$ aber einschließt, die Ungleichung

$$\left|\frac{1}{x} - P(x)\right| < \varepsilon \tag{21}$$

gilt, wobei ε eine beliebig klein gewählte positive Größe ist. Das Polynom $Q(x)$ ist dann ein entsprechender Abschnitt der Reihe

$$\mathfrak{L}(x) = \frac{x-a}{a} - \frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{a}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x-a}{a}\right)^3 - \cdots,$$

die die Gleichung

$$\mathfrak{L}'(x) = \frac{1}{x}$$

erfüllt; bei passender Wahl von s gilt auch die Ungleichung

$$|\mathfrak{L}(x) - Q(x)| < \varepsilon \tag{22}$$

für das Innere des bezeichneten Kreises $\mathfrak{K}$. Die Gleichung (20) ergibt nun

$$\mathfrak{L}(b) - \mathfrak{L}(a) - (\mathfrak{L}(b) - Q(b)) - (\mathfrak{L}(a) - Q(a))$$
$$= \lim_{m=\infty} \sum_{\nu}^{0,n-1} (x_{\nu+1} - x_\nu)\left(\frac{1}{x_\nu} + \left(P(x_\nu) - \frac{1}{x_\nu}\right)\right),$$

und die Stellen x_ν liegen alle im Innern des Kreises $\mathfrak{K}$; also folgt den Ungleichungen (21) und (22) und der in § 1 erhaltenen Beziehung (10) zufolge

$$|\mathfrak{L}(b) - Q(b)| < \varepsilon, \quad |\mathfrak{L}(a) - Q(a)| < \varepsilon,$$
$$\left|\sum_{\nu}^{0,n-1} (x_{\nu+1} - x_\nu)\left(P(x_\nu) - \frac{1}{x_\nu}\right)\right| < \varepsilon \sum_{\nu}^{0,n-1} |x_{\nu+1} - x_\nu| < \varepsilon A(p, q).$$

Der Gleichung (11) des § 1 zufolge ist nun

$$\lim_{m=\infty} \sum_{\nu}^{0,n-1} \frac{x_{\nu+1} - x_\nu}{x_\nu} = i A(p, q) = i A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right);$$

die Gleichung

$$\mathfrak{Q}(b) - \mathfrak{Q}(a) = i\,A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \tag{23}$$

gilt also bis auf drei Glieder, die mit ε beliebig der Null genähert werden können. Die beiden Seiten dieser Gleichung sind aber von ε unabhängig; also gilt dieselbe genau.

Jetzt setzen wir

$$a = a_0, \quad b = a_1, \quad a_{\nu+1} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\,a_\nu,$$

$$\mathfrak{Q}_\nu(x - a_\nu) = c_\nu + \frac{x - a_\nu}{a_\nu} - \frac{1}{2}\left(\frac{x - a_\nu}{a_\nu}\right)^2 + \cdots,$$

$$\mathfrak{Q}(x) = \mathfrak{Q}_0(x - a_0),$$

dann wird $a_8 = a$, und da $a_{\nu+1}$ ebenso aus a_ν hervorgeht wie b aus a, so ergibt die Gleichung (23)

$$\mathfrak{Q}_\nu(a_{\nu+1} - a_\nu) - \mathfrak{Q}_\nu(0) = i\,A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right). \tag{24}$$

Die Reihe $\mathfrak{Q}_{\nu+1}(x - a_{\nu+1})$ ist dann die analytische Fortsetzung von $\mathfrak{Q}_\nu(x - a_\nu)$, wenn

$$\mathfrak{Q}_\nu(a_{\nu+1} - a_\nu) = \mathfrak{Q}_{\nu+1}(0) = c_{\nu+1}$$

gesetzt wird, da offenbar immer

$$\mathfrak{Q}'_\nu(x - a_\nu) = \frac{1}{x};$$

addiert man die Gleichungen (24), in denen $\nu = 0, 1, \ldots, 7$ gesetzt wird, so folgt

$$\mathfrak{Q}_7(a_8 - a_7) - \mathfrak{Q}_0(0) = \mathfrak{Q}_7(a - a_7) - \mathfrak{Q}(a) = 8\,i\,A(p, q),$$

und diese Größe ist offenbar das über den Kreis $|x| = |a|$ im positiven Umlaufssinne erstreckte Integral

$$\int \frac{dx}{x}$$

in der Sprache der elementaren Funktionentheorie, dessen Wert hiermit feststeht; es ist $2\pi i$, wenn wir

$$A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

setzen.

Daß der Buchstabe π hier dieselbe Bedeutung hat wie in der Elementargeometrie, geht aus folgender Betrachtung hervor. Ist α die Hälfte eines rechten Winkels, den wir als Zentriwinkel in einen Kreis vom Radius 1 legen, so ist

$$p = q = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\alpha = \cos\alpha;$$

$$p_1 = \sqrt{\frac{1+p}{2}} = \cos\frac{\alpha}{2}, \quad q_1 = \sqrt{\frac{1-p}{2}} = \sin\frac{\alpha}{2};$$

die Größe $2q_1$ ist also die Summe der Sehnen der beiden Zentriwinkel $\frac{\alpha}{2}$, in die α zerfällt; ebenso $2^2 q_2$ die Summe der Sehnen der vier Zentriwinkel $\frac{\alpha}{2^2}$, in die α zerfällt usf. Der Grenzwert dieser Größen, d. h. $A(p, q)$ ist also ein Achtel des Kreisumfangs vom Radius 1 oder $\frac{\pi}{4}$ in der gewöhnlichen Bezeichnung. Ebenso ist, beiläufig bemerkt, $A(p, q)$ das Winkelargument der komplexen Größe $p + qi$ gemessen als Bogenlänge im Kreis vom Radius 1 und auf der Strecke von 0 bis 2π mit Ausschluß des letzteren Wertes.

Nachdem somit der Residuensatz elementar bewiesen ist, kommt man leicht zu den Sätzen, die bisher in der Weierstraßischen Funktionentheorie Weitläufigkeiten verursachten.

Sei insbesondere

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{\nu}^{0,\infty} a_\nu x^\nu$$

eine Potenzreihe, die auf der Kreislinie

$$|x| = r$$

regulär ist und die Ungleichung

$$|\mathfrak{P}(x)| < g \tag{25}$$

erfüllt; diese Ungleichung gilt dann auch in einem die Kreislinie einschließenden, mit ihr konzentrischen und hinreichend schmalen Kreisringe, den wir mit dem am Schlusse des § 2

eingeführten Gebiete $\mathfrak{G}$ identifizieren können. Jetzt hat man zunächst die Gleichung

$$\int \frac{\mathfrak{P}(x)}{x^{n+1}} dx = 2\pi i a_n,$$

wobei links über die Kreislinie $|x| = r$ im positiven Sinne herum integriert werde. Auf der Integrationslinie ist offenbar nach (25)

$$\left|\frac{\mathfrak{P}(x)}{x^{n+1}}\right| < g r^{-n-1};$$

die Länge derselben ist $2\pi r$; der Abschätzungssatz des § 2 ergibt also

$$2\pi\, a_n| < 2\pi r \cdot g r^{-n-1}, \quad |a_n| < g r^{-n},$$

d. h. die Formel, die beim Beweis des Weierstraßischen Doppelreihensatzes notwendig gebraucht wird. Weiter ist man jetzt in der Lage, den Laurentschen Satz ungefähr ebenso zu beweisen wie es in der Cauchyschen Funktionentheorie geschieht, aber ohne aus dem Bereich der elementaren Begriffe und Beweismittel herauszutreten.

Revision des Atomgewichtes des Wismuths. Analyse des Wismuthchlorids.

Von **O. Hönigschmid** und **L. Birckenbach.**

Vorgelegt in der Sitzung am 6. März 1920.

Der heute giltige internationale Wert für das Atomgewicht des Wismuths beträgt Bi = 208,0. Er basiert auf den Resultaten der Bestimmungen dieser Konstante, die in der zweiten Hälfte des vorigen und im Anfange dieses Jahrhunderts von Schneider[1]), Marignac[2]) sowie Gutbier[3]) und seinen Schülern ausgeführt wurden und die alle in vorzüglicher Übereinstimmung zu dem angegebenen Werte führten. Nur A. T. Classen[4]) hatte eine höhere Zahl gefunden, nämlich Bi = 208,9, die aber keine weitere Beachtung fand. Das Atomgewicht des Wismuths schien so sicher gestellt, daß B. Brauner in seiner kritischen Besprechung der Bestimmungen dieses Atomgewichtes nur eine Unsicherheit von höchstens einigen Einheiten der ersten Dezimale für möglich erklärt.

Wir haben eine Revision dieses Atomgewichtes vorgenommen, um eine Methode auszuarbeiten, die es gestattet in zuverlässiger Weise und mit höchst erreichbarer Genauigkeit diese Konstante zu bestimmen, da es möglicherweise ein in wägbarer

---

[1]) Schneider, Pogg. Anal. **82**, 303 (1851); Journ. f. prakt. Ch. **50**, 461 (1894).

[2]) Marignac, Oeuvres Complètes, II, 713 (1883).

[3]) Gutbier, Journ. f. prakt. Ch. **77**, 457 (1908), **78**, 409 (1908), **78**, 421 (1908).

[4]) Classen, Ber. **23**, 938 (1890).

Menge faßbares Isotop des Wismuths gibt, das beim radioaktiven Zerfall des Thoriums entsteht und welches ein Atomgewicht von 208,1 haben müßte. Die bisher beim Wismuth angewandten Atomgewichts-Bestimmungsmethoden würden es nicht gestatten, kleine, vielleicht nur eine Einheit der ersten Dezimale betragende Unterschiede im Atomgewicht festzustellen, da die Analysenserien all der genannten Forscher Differenzen aufweisen, die mehrere Einheiten der ersten Dezimale betragen.

Wir wählten die Analyse des Chlorids und Bromids des Wismuths, da diese Methode jedenfalls eine viel größere Genauigkeit garantiert, als die anderen bisher hiezu angewandten Bestimmungsmethoden.

Über die bis heute bei der Analyse des Chlorids erzielten Ergebnisse soll im nachstehenden kurz berichtet werden.

Als Ausgangsmaterial diente metallisches Wismuth, das nach den kombinierten Methoden von Schneider und Mylius gereinigt worden war. Das Chlorid wurde durch Erhitzen des Metalls in reinem, trockenen Chlorstrom dargestellt und zwar in dem von dem einen von uns konstruierten und bereits früher beschriebenen Quarzapparate, der es ermöglicht, das für jede einzelne Analyse benötigte Chlorid in absolut trockenem Chlorstrom darzustellen, es nochmals in trockenem Stickstoff in ein gewogenes Quarzröhrchen zu sublimieren, darin zu schmelzen und es schließlich in trockenem Luftstrom, ohne es an die Außenluft zu bringen, in ein Wägeglas einzuschließen, in dem es zuverlässig gewogen werden kann.

Das Chlorid wurde in 1000 cc ca. 3 n-Salpetersäure gelöst und das Chlorion mit einer verdünnten Silbernitratlösung gefällt, wodurch das Volumen der Lösung auf ca. 2500 cc gebracht wurde, so daß sich das gefällte Silberchlorid schließlich in einer ca. 1,25 n-Salpetersäurelösung befand.

Es wurde sowohl das Verhältnis $BiCl_3 : 3\,AgCl$ auf gravimetrischem Wege, wie auch das Verhältnis $BiCl_3 : 3\,Ag$ mittels gravimetrischer Titration mit Hilfe des Nephelometers bestimmt. Alle Wägungen, die mit Gegengewichten ausgeführt wurden, sind auf den luftleeren Raum reduziert.

Die benötigten Reagentien wurden nach den wiederholt beschriebenen Methoden, wie sie von T. W. Richards und seiner Schule ausgearbeitet wurden, sorgfältigst gereinigt.

Die ausgeführten Analysen ergaben die in den folgenden Tabellen wiedergegebenen Resultate. Die für Wismuth berechneten Atomgewichtswerte sind auf die Basis Ag = 107,88 und Cl = 35,457 bezogen.

Die in der I. Serie angeführten Analysen dienten dem Studium der Methode und der vorläufigen Ermittlung des angenäherten Atomgewichtes, dessen Kenntnis zur Ausführung der Titrationen notwendig war.

I. (vorläufige) Serie.

Verhältnis $BiCl_3 : 3\,Ag\,Cl$.

Nr. d. Anal.	Gew. d. $BiCl_3$ i. Vak.	Gew. d. AgCl i. Vak.	At. Gew. v. Bi.
1	4,85149	6,61496	209,004
2	3,48635	4,75395	208,980
3	5,49146	7,48790	208,990
4	3,81905	5,20711	209,011
5	3,77792	5,15091	209,019
		Mittel . . .	209,001

II. (End-) Serie.

Verhältnis $BiCl_3 : 3\,Ag$.

Nr. d. Anal.	Gew. d. $BiCl_3$ i. Vak. A.	Gew. d. Ag i. Vak.	At. Gew. v. Bi.
6	3,29899	3,38522	209,025
7	3,54337	3,63594	209,029
8	4,74133	4,86523	209,027
9	2,64024	2,70934	209,015
10	4,49482	4,61203	209,044
11	5,19919	5,33506	209,026
15	4,99478	5,12542	209,019
16	5,29291	5,43129	209,023
17	4,62990	4,75076	209,035
		Mittel . . .	209,027

Verhältnis $BiCl_3 : 3\,AgCl$.

Nr. d. Anal.	Gew. d. $BiCl_3$ i. Vak.	Gew. d. AgCl i. Vak.	At. Gew. v. Bi.
6 a	3,29899	4,49789	209,022
7 a	3,54337	4,83067	209,048
8 a	4,74133	6,46455	209,014
9 a	2,64024	3,59956	209,037
10 a	4,49482	6,12841	209,016
11 a	5,19919	7,08896	209,008
12	4,36226	5,94742	209,029
13	4,42255	6,02960	209,030
14	4,82574	6,57976	209,008
		Mittel . . .	209,024

Auf Grund der Resultate dieser 18 Bestimmungen der Endserie ergibt sich somit als Mittel für das Atomgewicht des Wismuths der Wert Bi = *209,026* mit einer mittleren Abweichung vom Mittel von ± 0,009. Die gute Übereinstimmung zwischen den Resultaten der gravimetrischen Bestimmungen und den Titrationen zeigt jedenfalls, daß die Bestimmungen durch die notwendigerweise angewandte hohe Säurekonzentration nicht ungünstig beeinflußt werden und andererseits auch kein basisches Wismuthsalz mit dem Silberchlorid niedergeschlagen wird. Wir betrachten heute die Zahl **209,026** als das wahrscheinlichste Atomgewicht des Wismuths. Dieser Wert ist um eine ganze Einheit, d. h. um 0,5 % höher als der international angenommene, stimmt aber nahe überein mit dem seinerzeit von Classen ermittelten und wird überdies gestützt durch einige Analysen des Wismuthbromids, die uns bisher als Mittel Bi = 209,034 ergaben.

Diese Untersuchung, die fortgesetzt wird, wurde mit Unterstützung der Bayerischen Akademie der Wissenschaften ausgeführt.

Untersuchungen über das Sternsystem.

Von **H. Seeliger.**

Vorgelegt in der Sitzung am 6. März 1920.

1.

Im Jahre 1898[1]) habe ich die Formeln aufgestellt, welche den Zusammenhang zwischen der scheinbaren Verteilung der Sterne und ihrer räumlichen herstellen. Betrachtet man als feststellbare Daten die Anzahlen der Sterne verschiedener Helligkeit und ihre mittleren Entfernungen oder Parallaxen, so entstehen vier Integralgleichungen zur Bestimmung jener Funktionen, welche die wesentlichen Eigenschaften unseres Sternsystems bestimmen. Ich habe das hiedurch charakterisierte Verfahren als „statistische Methode" bezeichnet (I, S. 6). Spätere Autoren haben diese Bezeichnung in „Stellarstatistik" umgeändert und diese Benennung für das ganze Gebiet scheint sich immer mehr einzubürgern.

Eine Erweiterung meiner Ansätze, die in I nur angedeutet war, habe ich dann in II durchgeführt, indem der Einfluß einer

[1]) Meine im folgenden verwendeten Abhandlungen werde ich mit den Nummern I bis IV bezeichnen.

I. Betrachtungen über die räumliche Verteilung der Sterne. Abhandlungen d. Ak. d. W. München 1898.

II. Unter dem gleichen Titel. Ebenda 1909.

III. Über die räumliche Verteilung der Sterne im schematischen Sternsystem. Sitzungsber. München 1911.

IV. Über die räumliche und scheinbare Verteilung der Sterne. Ebenda 1912.

etwaigen Absorption des Sternlichts berücksichtigt wurde. In den vier Integralgleichungen kommen als zu bestimmende Funktionen vor: γ und D, welche die Extinktion und die räumliche Verteilungsdichte der Sterne bestimmen und als Funktionen des Ortes zu betrachten sind, ferner die „Häufigkeitsfunktion $\varphi(i)$ der absoluten Leuchtkräfte" und eine gewisse Maximalhelligkeit H. Diese Größen haben mehrfache Proben als überall vom Ort unabhängig erwiesen. Dadurch und durch eine verhältnismäßig leicht bestimmbare Sterngröße n ist die Entfernung der Grenze des Sternsystems vom Sonnensystem gegeben. Es sind also drei Funktionen und eine Größe H zu bestimmen und es bleiben noch Kontrollen für die Zulässigkeit der gemachten Annahmen übrig. Jedenfalls ist das Hauptproblem der Stellarstatistik auf ein allerdings verwickeltes Problem der Theorie der Integralgleichungen zurückgeführt. Seine Auflösung kann indessen durch speziellere Ansätze, da es sich um eine exakte Darstellung von Daten mit sehr beschränkter Genauigkeit nicht handeln kann, genügend durch numerische Rechnungen bewältigt werden. Übrigens war es bisher ausreichend oder mußte als ausreichend angesehen werden, von der jedenfalls geringen Extinktion im allgemeinen abzusehen. Meine Ansätze gingen von der Wahrnehmung aus, daß für die helleren Sterne die Differenz $\log A_m - \log A_{m-1/2}$, wo A_m die Gesamtzahl der Sterne auf einem bestimmten Himmelsareale und zwar von den hellsten bis zu denen von der Größe m ist, so nahe konstant ist, daß eine systematische Veränderlichkeit mit m nicht mit Sicherheit festgestellt werden kann. Ich bin zu dieser Erkenntnis gelangt auf Grund der recht umständlichen Bearbeitung meiner vor vielen Jahren ausgeführten Abzählungen der in der Bonner D. M. enthaltenen Sterne, was damals (1884) das einzige zuverlässige Material war. Erst Jahrzehnte später erschien die Potsdamer Durchmusterung (P. D.), welche die Größen aller Sterne am nördlichen Himmel bis etwa zur Größe 7 enthält und an Zuverlässigkeit und Sicherheit zweifellos alle andern Arbeiten ähnlicher Tendenz übertrifft. Es ist deshalb wichtig, wie ich

schon früher getan habe, darauf hinzuweisen, daß die bemerkte Tatsache durch die P. D. vollständig bestätigt wird. Die folgende kleine Tabelle für die Gesamtheit der Sterne gibt darüber Rechenschaft.

	P. D.		Sch.		Sch. — P. D.
m	$\log A\,m$	$\log \alpha$	$\log A\,m$	$\log \alpha$	
2.5	1.462		1.546		+ 0.084
		0.255		0.263	
3.5	1.973		2.072		99
		273		0.262	
4.0	2.246		2.334		88
		241		0.259	
4.5	2.487		2.593		106
		271		0.258	
5.0	2.758		2.851		93
		271		0.255	
5.5	3.029		3.106		77
		248		0.254	
6.0	3.277		3.360		83
		238		0.252	
6.5	3.515		3.612		97
		261		0.249	
7.0	3.776		3.861		85

Nicht viel anders gestalten sich die Vergleichungen in den einzelnen Milchstraßzonen. Aber die Differenz Sch. — P. D. zeigt nicht unerhebliche Verschiedenheiten. So ist sie z. B. für die Milchstraße um rund + 0.03 größer, was vielleicht auf die Verschiedenheit der Sternfülle auf der nördlichen und südlichen Halbkugel zurückzuführen ist. Aber es könnten auch andere Umstände mitgewirkt haben, deren weitere Untersuchung nicht ohne Interesse und Wichtigkeit wäre.

Die Potsdamer Werte von $\log A_m$ lassen wohl kaum die leiseste Andeutung eines systematischen Ganges von $\log \alpha$ erkennen. Unter Sch. sind neuere auf photographischem Wege gewonnene Werte angeführt. Hier tritt eine Verkleinerung der $\log \alpha$ mit zunehmendem m hervor und zwar in einer Deutlichkeit, die aufs schroffste der Genauigkeit widerspricht, welche die einzelnen Werte darbieten können, wie auch die Gegenüberstellung der an sich zweifellos viel genaueren Werte P. D. zeigt. Dieses merkwürdige Vorkommnis ist vollständig und nur dadurch erklärbar, daß die direkten Resultate der Abzählungen eine Art Ausgleichung durch Kurvenzeichnungen erhalten haben, die von bedeutender Willkür nicht frei sein

kann und eine deutlich erkennbare Regelmäßigkeit vortäuscht, die trotzdem gar nicht vorhanden zu sein braucht. Ich habe schon öfters vor solchen Täuschungen durch Ausgleichungen gewarnt, die gerade bei dem vorliegenden Problem geradezu gefährlich werden können. Jedenfalls geben die Sterne bis zur Größe 7.0 die Berechtigung zur Annahme, daß $\log \alpha$ konstant angenommen werden darf. Ob und wieweit über diesen Bezirk hinaus diese Eigenschaft besteht, ließ sich nicht mit unverminderter Sicherheit feststellen, da sowohl das in meinen früheren Rechnungen benutzte, von der D. M. dargebotene Material, als auch die benutzten photometrischen Angaben der Harvard-Revision nicht die genügende Genauigkeit darboten, sobald man Sterne von erheblich geringerer Helligkeit als von der 8. Größe heranzog. Doch war dies nicht von erheblicher prinzipieller Bedeutung, da es sich nur um den Ausgangspunkt handelte, demzufolge $\log \alpha$ meist sehr nahe konstant anzunehmen ist und dann von einem gewissen Werte von m an zuerst langsamer, dann schneller abnimmt. Dieser Ausgangspunkt wurde auch von mir selbst korrigiert und es ist sehr merkwürdig, daß man in ziemlich leichtfertiger Kritik diese Sachlage übersehen konnte. Die gemachte Annahme über das Verhalten der $\log \alpha$ war zu schließen aus den Resultaten aus den von mir bearbeiteten Herschelschen „Eichungen", die damals fast das einzige brauchbare Material darboten. Ein in jedem Falle brauchbarer Ansatz schien es zu sein, wenn angenommen wird, daß bis zu einem näher zu bestimmenden $m = n$ genähert $\log \alpha$ konstant bleibt und für größere m ziemlich schnell abnimmt. Es lag nahe, ehe diese Annahme korrigiert wurde, sie als genau erfüllt anzusehen und daraus die Konsequenzen zu ziehen, zumal dies überaus leicht geschehen konnte. Es war also für $m < n$ genau

$$\log A_m = c \cdot h_m^{\frac{\lambda - 3}{2}}, \tag{1}$$

wo h_m die zur Größe m gehörende Helligkeit ist und für $m > n$ war diese Gleichung sicher nicht gültig. Die Zahlen A_m

sind also nicht durch dieselbe analytische Formel darstellbar und zwei verschiedene Formeln werden bei $m = n$ zusammenstoßen. Interpretiert man diese als sicher vorausgesetzte Tatsache in einfachster und in gewissem Sinne allein zulässiger Weise, so läßt sich strenge beweisen, daß die räumliche Dichtigkeit $\Delta(r)$ der Sternverteilung eindeutig bestimmt ist durch die Formel:

$$\Delta(r) = \gamma r^{-\lambda}. \qquad (2)$$

Diese Formel führt aber zu Konsequenzen, die mit den mehr oder weniger sicher und zwar aus den Apexbewegungen der Sterne bestimmten mittleren Parallaxen π_m für die einzelnen Sterngrößen im Widerspruch stehen. Dieser Widerspruch ließ sich aber (III) heben, wenn man die Ausgangsannahme korrigiert. Es stellte sich dann heraus, daß der doch im allgemeinen besonders interessierende Verlauf von $\Delta(r)$ sehr nahe durch eine Formel von derselben Gestalt wie (2) dargestellt wird und nur für einige Siriusweiten kaum überschreitende Werte von r eine wesentliche Veränderung erzeugende Korrektur zu erhalten hat, daß also der Verlauf der m. Parallaxen der helleren Sterne hauptsächlich infolge der veränderten Werte Δ für kleine r von der aus (2) folgenden Formel $\pi_m = c \cdot h_m^{1/2}$ merkbare Abweichungen zeigt. Übrigens habe ich in einer späteren gelegentlichen Bemerkung[1]) gezeigt, wie man wenigstens in speziellen Fällen die Korrektur der Funktion $\Delta(r)$ auch so vornehmen kann, daß man die Formel (2) allgemein gelten läßt, aber annimmt, daß r nicht von der Sonne, sondern von einem Punkte an zählt, der um einige Siriusweiten von ihr entfernt liegt. Daraus folgt schon die im Sinne allgemeiner Betrachtungen sehr wenig erhebliche Bedeutung dieser Korrektur.

Durch die ausgeführten Betrachtungen war gezeigt, daß die Formel (2) im großen und ganzen den wahren Verhältnissen genähert entspricht und zwar war dieses Resultat fast

[1]) Bemerkungen über das schematische Sternsystem. A. N., Nr. 4801.

ohne Rechnung mühelos zu erreichen und das war doch immerhin ein Fortschritt, da man vorher auch nicht einmal eine ganz ungefähre Angabe über den Verlauf von Δ machen konnte. Die Konstante λ ist überall ein positiver echter Bruch, dessen Wert von der gallaktischen Breite abhängt und da am Himmel selbstverständlich nirgends beliebig große Helligkeiten vorkommen, folgt — zunächst unter der Annahme einer nicht zu großen Extinktion — die endliche Begrenzung unseres Sternsystems. Die oben erwähnte Interpretation bestand in der Annahme, daß die Leuchtkräfte i einen endlichen Wert H nicht überschreiten können oder vielmehr, daß für $i > H$, $\varphi(i)$ als unmerklich angenommen werden darf. Man kann diese Annahme, wie später gezeigt werden wird, verallgemeinern, indem man der Funktion $\varphi(i)$ bei $i = H$ einen starken Abfall oder direkt eine Unstetigkeit zuteilt. Man kann diese Annahme weiterhin durch plausible Erwägungen bekräftigen, was hier nicht näher erörtert werden soll. Dagegen muß als ganz verfehlt angesehen werden, aus einer kleinen Zahl von Sternen, bei denen man aus rein hypothetischen Gründen von vorneherein eine besonders große Leuchtkraft anzunehmen sich berechtigt fühlen mag, zu folgern, daß die Annahme eines endlichen H unzutreffend sei.

Die genannte Interpretation bietet die Möglichkeit dar, die räumliche Ausdehnung des Sternsystems zu bestimmen, ein Vorhaben, das sonst nur durch ganz vage und willkürliche Annahmen bisher ab und zu versucht wurde. Denn eine direkte Folge dieser Interpretation ist das Auftreten einer Unstetigkeit in den zweiten oder höheren Differentialquotienten von A_m, wie ich schon in I (S. 41) gezeigt habe. Umgekehrt ist eine solche Unstetigkeit kaum anders zu erklären als durch Unstetigkeiten im Verlaufe von $\varphi(i)$, wie der analytische Ausdruck für A_m ergibt. Zur Zeit meiner früheren Arbeiten war es nicht möglich, aus dem Verlaufe von A_m etwas direkt nachzuweisen, was wie eine Unstetigkeit bei m etwa gleich 9—10 zu betrachten ist. In den letzten Jahren sind nun ausführliche Ermittlungen über den Verlauf von A_m und zwar bis zu

beträchtlichen Werten von m entstanden. Wenn auch die gewonnenen Resultate voraussichtlich noch bedeutende Korrekturen erfahren werden, so ist doch auf den ersten Blick zu sehen, daß in der Tat für Werte von $m = n$, wie sie ungefähr zu erwarten waren, heftige Störungen in den offenbar künstlich ausgeglichenen Resten auftreten, die doch ganz im gewünschten Sinne und sicher nicht viel anders zu erklären sind. Darauf werde ich im folgenden einzugehen haben.

Von Anfang an habe ich als Einheitsentfernung die Siriusweite eingeführt, welche der Parallaxe 0".2 entspricht. Ihre Wahl entsprang zunächst dem Wunsch, die kleinste Entfernung zur Einheit zu nehmen, in welcher noch so viele Sterne stehen, daß Mittelbildungen einen Sinn haben. Aber die getroffene Wahl entspricht auch Gesichtspunkten, die bei der Wahl von Einheiten astronomischer Größen als maßgebend gehalten werden. Der Parallaxe 0".2 entspricht eine Entfernung von 1.03 Millionen Erdbahnradien und umgekehrt 1 Million Erdbahnradien der Parallaxe 0".206. Man müßte also in der Tat in äußerster Konsequenz, wie es Herr Charlier tut, meine Bezeichnung Siriusweite festhaltend, eine solche 1 Million Erdbahnradien zuordnen. Da aber in vielen astronomischen Angaben die Parallaxen eine große Rolle spielen, wird zur Vereinfachung und der geringen Genauigkeit stellarer Entfernungsangaben entsprechend es sich empfehlen, meine Definition „1 Siriusweite = 0".2 Parallaxe" nicht aufzugeben. In jedem Falle ist der offenbar aus dem Prinzip des Widerspruchs entsprungene Vorschlag als Einheit für stellare Entfernungen eine solche zu wählen, welche der Parallaxe 1".0 oder 0".1 entspricht, als ein ganz willkürlicher und durch nichts zu rechtfertigender anzusehen.

Ich habe die vorstehenden Auseinandersetzungen für nötig gehalten, obwohl sie nicht wesentlich über das hinausgehen, was ich besonders in den Arbeiten II und IV ausgesprochen habe, und trotzdem eine ausführliche und vortreffliche Analyse meiner Arbeiten von Dr. Deutschland[1]) vorliegt, weil vor

[1]) V. J. S. der Astr. Ges., Jahrg. 1919.

$1^1/_2$ Jahren eine Schrift[1]) erschienen ist, die es sich zur Aufgabe zu machen schien, nicht etwa nur die numerischen Resultate, sondern ihre ganze Tendenz herabzuwürdigen. Die ganze Schrift ist eine Kompilationsarbeit, deren Zusammenstellungen nirgends etwas wesentlich Neues enthalten, doch immerhin brauchbar sind. Hätte sich der Verfasser damit begnügt, so wäre seine Arbeit nicht ohne Verdienst. Er hat sich aber in, gelinde gesagt, einseitiger Kritik in Gebiete und an Fragen gewagt, die seinem Verständnis entrückt zu sein scheinen. Deshalb werde ich im folgenden auf seine Angriffe im einzelnen nur hie und da mit einer Bemerkung eingehen und es ruhig abwarten, ob der Verfasser sich besser orientieren werde. Eine allgemeine Polemik mit ihm scheint mir völlig aussichtslos zu sein.

2.

Ich gehe nun zu einigen allgemeinen Betrachtungen über die früher aufgestellten Integralgleichungen über, wobei ich mich auf die erwähnten Arbeiten, insbesondere auf die ersten Abschnitte von II beziehe.

Es sei $\varphi(i)$ die vom Ort unabhängige Häufigkeitsfunktion der Leuchtkräfte i, die also die Gleichung erfüllt:

$$\int_0^R \varphi(i)\, di = 1.$$

Ist weiter $D(r)$ die Anzahl aller Sterne in der Volumeinheit in der Entfernung r und wird eine etwaige Extinktion dadurch eingeführt, daß die scheinbare Helligkeit h eines Sternes nicht $\frac{i}{r^2}$, sondern $h = \frac{i\,\psi(r)}{r^2}$ ist, so setze man:

$$r^2 = \varrho^2\,\psi(r); \quad r = f(\varrho)$$

und

$$A(\varrho) = D[f(\varrho)] \cdot \left(\frac{f(\varrho)}{\varrho}\right)^2 \cdot f'(\varrho).$$

[1]) Schouten, On the Determination of the principal laws of statistical Astronomy. Amsterdam 1918.

Dann wird die auf dem Himmelsareal ω stehende Anzahl A_m der Sterne:

$$A_m = \omega \int_{r_0}^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} \Delta(\varrho)\,\varrho^2\,d\varrho \cdot \int_{h_m\varrho^2}^{H} \varphi(y)\,dy; \quad \text{für } m < n \qquad (I^*)$$

$$A_m = \omega \int_{r_0}^{\sqrt{\frac{H}{h_n}}} \Delta(\varrho)\,\varrho^2\,d\varrho \int_{h_m\varrho^2}^{H} \varphi(y)\,dy; \quad \text{für } m > n. \qquad (II^*)$$

Für die mittleren Parallaxen π_m der Sterne von der Größe m findet sich:

$$\frac{\pi_m}{0.''2} \cdot \int_{r_0}^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} \Delta(\varrho)\,\varrho^4\,\varphi(h_m\varrho^2)\,d\varrho = \int_{r_0}^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} \Delta(\varrho)\,\frac{\varrho^4}{f(\varrho)}\,\varphi(h_m\varrho^2)\,d\varrho; \qquad (III^*)$$

für $m < n$

und für $m > n$ gilt eine analoge Formel (IV*), die aus (III*) entsteht, wenn man in den Integrationsgrenzen h_n an Stelle von h_m setzt[1]). Daraus folgt u. a., daß man die räumliche Dichtigkeit D aus den Abzählungen A_m allein nicht bestimmen kann, sondern nur Δ. r_0 ist die untere Grenze, so daß im Raume $r < r_0$ keine Sterne vorkommen. Streng genommen wird der sternleere Raum begrenzt durch ϱ_0, wo $r_0 = \frac{\varrho_0}{\sqrt{\psi(\varrho_0)}}$. H ist die größte überhaupt vorkommende Leuchtkraft, h_n die scheinbare Helligkeit der Sterne, für welche die oben erwähnte Unstetigkeit im Verlaufe des Differentialquotienten von A_m auftritt und die Entfernung der Grenze des Sternsystems in der Richtung, in welcher ω liegt, findet man durch die Formel:

$$r_1 = \sqrt{\frac{H}{h_n}\,\psi(r_1)}.$$

[1]) In IV S. 480 habe ich in manchen Fällen bequemere Formeln für A_m durch Umkehrung der Integrationsfolge aufgestellt.

Diese Formeln sollen nunmehr insofern verallgemeinert werden, daß, wenn jetzt $\Phi(i)$ die Verteilungsfunktion ist, $\Phi(i) = \varphi(i)$ sein soll, so lange $i < H$, dagegen $\Phi(i) = \chi(i)$, wenn $i > H$, wobei $\chi(i)$ beliebig sein kann und nicht gerade Null zu sein braucht. Dann ist:

$$\int_0^H \varphi(i)\, di + \int_H^\infty \chi(i)\, di = 1.$$

Am einfachsten bekommt man die verallgemeinerten Formeln (I) bis (IV), wenn man für alle m

$$A_m = \omega \int_{r_0}^{r_2} \Delta(\varrho)\, \varrho^2\, d\varrho \int_{h_m \varrho^2}^\infty \Phi(y)\, dy$$

setzt. Es ist hierbei

$$r_2 = \sqrt{\frac{r_1^2}{\psi(r_1)}} = \sqrt{\frac{H}{h_n}}. \tag{1}$$

Man hat offenbar 2 Fälle zu unterscheiden:

1. $r_2 > \sqrt{\frac{H}{h_m}}$, d. h. $m < n$. Hier ist:

$$A_m = \omega \int_{r_0}^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} \Delta(r)\, r^2\, dr \int_{h_m r^2}^\infty \Phi(x)\, dx + \int_{\sqrt{\frac{H}{h_m}}}^{r_2} \Delta(r)\, r^2\, dr \int_{h_m r^2}^\infty \Phi(x)\, dx.$$

Das erste Glied ist:

$$\omega \int_{r_0}^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} \Delta(r)\, r^2\, dr \int_{h_m r^2}^H \varphi(x)\, dx + \omega \int_{r_0}^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} \Delta(r)\, r^2\, dr \int_H^\infty \chi(x)\, dx,$$

im zweiten hat man einfach Φ durch χ zu ersetzen, so wird also für $m < n$

$$\frac{A_m}{\omega} = \int_{r_0}^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} \Delta(r)\, r^2\, dr \int_{h_m r^2}^{H} \varphi(x)\, dx + \int_{r_0}^{\sqrt{\frac{H}{h_n}}} \Delta(r)\, r^2\, dr \int_{H}^{\infty} \chi(x)\, dx$$

$$+ \int_{\sqrt{\frac{H}{h_m}}}^{\sqrt{\frac{H}{h_n}}} \Delta(r)\, r^2\, dr \int_{h_m r^2}^{\infty} \chi(x)\, dx. \qquad \text{(I)}$$

Die rechte Seite kann man auch schreiben:

$$\int_{r_0}^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} \Delta(r) r^2 dr \int_{h_m r^2}^{H} \varphi(x)\, dx + \int_{r_0}^{\sqrt{\frac{H}{h_n}}} \Delta(r) r^2 dr \int_{H}^{\infty} \chi(x)\, dx - \int_{\sqrt{\frac{H}{h_m}}}^{\sqrt{\frac{H}{h_n}}} \Delta(r) r^2 dr \int_{H}^{h_m r^2} \chi(x)\, dx$$

2. $r_2 < \sqrt{\frac{H}{h_m}}$, d. h. $m > n$:

$$\frac{A_m}{\omega} = \int_{r_0}^{\sqrt{\frac{H}{h_n}}} \Delta(r)\, r^2\, dr \int_{h_m r^2}^{H} \varphi(x)\, dx + \int_{r_0}^{\sqrt{\frac{H}{h_n}}} \Delta(r)\, r^2\, dr \int_{H}^{\infty} \chi(x)\, dx. \qquad \text{(II)}$$

Für die mittleren Parallaxen findet man nach (III*) $\pi = 0''.2 \cdot \frac{Z}{N}$, wo für $m < n$

$$Z = \int_{r_0}^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} \Delta(r)\, \frac{r^4}{f(r)}\, \varphi(h_m r^2)\, dr + \int_{\sqrt{\frac{H}{h_m}}}^{\infty} \Delta(r)\, \frac{r^4}{f(r)}\, \chi(h_m r^2)\, dr \qquad \text{(III)}$$

und N derselbe Ausdruck für $f(r) = 1$ wird.

2. Ist dagegen $m > n$, also $r_2 < \sqrt{\frac{H}{h_m}}$, so wird

$$Z = \int_{r_0}^{\sqrt{\frac{H}{h_n}}} \Delta(r) \frac{r^4}{f(r)} \varphi(h_m r^2)\, dr \qquad \text{(IV)}$$

und N ist selbstverständlich derselbe Ausdruck für $f(r) = 1$.

In I S. 605 habe ich erwähnt, daß die Betrachtung des zweiten Differentialquotienten $\frac{d^2 A_m}{d h_m^2}$ zu neuen Überlegungen auffordert. Die Formeln (I) und (II) ergeben:

$$\text{(I)} \quad \frac{1}{\omega}\frac{dA_m}{dh_m} = -\int_{r_0}^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} \Delta(r) r^4 \varphi(h_m r^2)\, dr - \int_{\sqrt{\frac{H}{h_m}}}^{\sqrt{\frac{H}{h_n}}} \Delta(r) r^4 \chi(h_m r^2)\, dr$$

$$\text{(II)} \quad \frac{1}{\omega}\frac{dA_m}{dh_m} = -\int_{r_0}^{\sqrt{\frac{H}{h_n}}} \Delta(r) r^4 \varphi(h_m r^2)\, dr.$$

Für die 2. Differentialquotienten ergibt sich:

$$\text{(I)} \quad \frac{1}{\omega}\frac{d^2 A_m}{dh_m^2} = +\tfrac{1}{2}\Delta\left(\sqrt{\frac{H}{h_m}}\right)\cdot\frac{1}{H}\left(\frac{H}{h_m}\right)^{1/2}[\varphi(H) - \chi(H)]$$
$$-\int_{r_0}^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} \Delta(r) r^6 \varphi'(h_m r^2)\, dr - \int_{\sqrt{\frac{H}{h_m}}}^{\sqrt{\frac{H}{h_n}}} \Delta(r) r^6 \chi'(h_m r^2)\, dr.$$

$$\text{(II)} \quad \frac{1}{\omega}\frac{d^2 A_m}{dh_m^2} = -\int_{r_0}^{\sqrt{\frac{H}{h_n}}} \Delta r \cdot r^6 \varphi'(h_m r^2)\, dr,$$

woraus für $m = n$ folgt:

$$\frac{1}{\omega}\left\{\left(\frac{d^2 A_n}{dh_n^2}\right)_I - \left(\frac{d^2 A_n}{dh_n^2}\right)_H\right\} = \Delta\left(\frac{d^2 A_n}{dh_n^2}\right)$$
$$= \frac{\Delta\left(\sqrt{\frac{H}{h_n}}\right)}{2H}\left(\frac{H}{h_n}\right)^{1/2}[\varphi(H) - \chi(H)]. \qquad \text{(V)}$$

Die vorstehenden Formeln ergeben für $m = n$

$$(A_n)_I - (A_n)_{II} = 0; \quad \left(\frac{dA_n}{dh_n}\right)_I - \left(\frac{dA_n}{dh_n}\right)_{II} = 0$$

und im 2. Differentialquotient entsteht ein Sprung vom Betrag (V), wenn $\varphi(H) \neq \chi(H)$. Diesen Satz habe ich bereits in I, S. 605 abgeleitet. Offenbar ist es nun vorteilhaft $\log A_m$ und m einzuführen. Für jede von m abhängige Größe B ist, wenn die bekannte Zahl 0.4343 mit ε bezeichnet wird:

$$\frac{d \log B}{dm} = \frac{\varepsilon\, d(\log \text{nat}\, AB)}{dm} = \frac{\varepsilon}{B}\frac{dB}{dm} = \frac{\varepsilon}{B}\frac{dB}{dh_m}\frac{dh_m}{dm}.$$

Weiter ist:

$$\frac{dh_m}{dm} = -\frac{0.4}{\varepsilon}h_m; \quad \frac{d^2h_m}{dm^2} = \left(\frac{0.4}{\varepsilon}\right)^2 h_m$$

$$\frac{d^2 \lg B}{dm^2} = -\frac{\varepsilon}{B^2}\left(\frac{dB}{dh_m}\right)^2\left(\frac{dh_m}{dm}\right)^2 + \frac{\varepsilon}{B}\frac{d^2B}{dh_m^2}\left(\frac{dh_m}{dm}\right)^2 + \frac{\varepsilon}{B}\frac{dB}{dh_m}\frac{d^2h_m}{dm^2}$$

Es soll nun B und $\frac{dB}{dh_m}$ stetig bleiben, während $\frac{d^2B}{dh_m^2}$ einen Sprung macht, dann ist:

$$\Delta\left(\frac{d^2 \log B}{dm^2}\right) = +\frac{1}{B}\cdot\frac{0.16}{\varepsilon}h_m^2 \cdot \Delta\left(\frac{d^2B}{dh_m^2}\right).$$

Nimmt man für B, $\log A_n$ und $m = n$, so wird aus (V)

$$\Delta\left(\frac{d^2 \log A_n}{dn^2}\right) = \omega\,\frac{0.08}{\varepsilon A_n}\Delta\left(\sqrt{\frac{H}{h_n}}\right)\cdot\left(\frac{H}{h_n}\right)^{3/2} H[\varphi(H) - \chi(H)]. \quad \text{(VI)}$$

Die Grenze r_1 des Sternsystems ist nach (1) gegeben durch

$$\frac{r_1^2}{\psi(r_1)} = r_2^2 = \frac{H}{h_n}.$$

h_n kann man bei genügendem Abzählungsmaterial als bekannt voraussetzen.

Bezeichnet man mit $\mathfrak{A}_m$ den Wert von A_m, wenn man $\frac{r^4}{f(r)}$ an die Stelle von r^4 setzt, d. h. $\frac{\Delta(r)}{f(r)}$ statt $\Delta(r)$, so hat man:

$$\frac{\pi}{0''.2} = \frac{d\mathfrak{A}_m}{dh_m} : \frac{dA_m}{dh_m}.$$

Der einfacheren Schreibweise halber soll der Index m zunächst fortgelassen werden

$$\pi \frac{dA}{dh} = 0''.2 \frac{d\mathfrak{A}}{dh} \quad \text{oder} \quad \pi A \frac{d\log A}{dm} = 0''.2\,\mathfrak{A} \frac{d\log \mathfrak{A}}{dm}.$$

Differenziert man nochmals nach m, so ist:

$$\pi \frac{d\log \pi}{dm} A \frac{d\log A}{dm} = -\pi \left[\frac{dA}{dm} \cdot \frac{d\log A}{dm} + A \frac{d^2 \log A}{dm^2}\right] + 0''.2 \left[\frac{d\mathfrak{A}}{dm} \frac{d\log \mathfrak{A}}{dm} + \mathfrak{A} \frac{d^2 \log \mathfrak{A}}{dm^2}\right].$$

Bildet man denselben Ausdruck für $m = n$, so wird hier A, π und $\frac{dA}{dm}$ stetig bleiben, dagegen wird $\frac{d\pi}{dm}$ einen Sprung machen müssen. Bezeichnet man denselben analog dem Früheren mit $\Delta\left(\frac{d\log \pi}{dm}\right)$, so wird demnach:

$$\pi \Delta\left(\frac{d\log \pi}{dm}\right) \cdot A \frac{d\log A}{dm} = -\pi A \Delta\left[\frac{d^2 \log A}{dm^2}\right] + 0''.2\,\mathfrak{A}\,\Delta\left(\frac{d^2 \log \mathfrak{A}}{dm^2}\right)$$

Nun ist nach VI

$$\mathfrak{A}_n \Delta\left[\frac{d^2 \log A_n}{dn^2}\right] = A_n \Delta\left(\frac{d^2 \log \mathfrak{A}_n}{dn^2}\right) \cdot f\left(\sqrt{\frac{H}{h_n}}\right)$$

$$\Delta\left(\frac{d\log \pi}{dn}\right) \frac{\partial \log A_n}{\partial n} + \Delta\left(\frac{d^2 \log A}{dm^2}\right) = \frac{0''.2}{\pi} \Delta\left(\frac{d^2 \log A_n}{dn^2}\right) \cdot \frac{1}{f\left(\sqrt{\frac{H}{h_n}}\right)},$$

was man auch schreiben kann:

$$\frac{1}{f\left(\sqrt{\frac{H}{h_n}}\right)} = \frac{\pi}{0''.2}\left[1 + \frac{\Delta\left(\frac{d\log \pi}{dn}\right) \cdot \frac{d\log A_n}{dn}}{\Delta\left(\frac{d^2 \log A_n}{dn^2}\right)}\right].$$

Nun war die Funktion f definiert durch

$$\varrho^2 \psi'(r) = r^2; \quad r = f(\varrho) = \varrho \sqrt{\psi'(r)}.$$

Es ist also, wenn $\varrho = \sqrt{\frac{H}{h_n}}$ gesetzt wird,

$$f(\varrho) = \sqrt{\frac{H}{h_n}} \cdot \psi'(r) = r_1,$$

wenn r_1 die Entfernung der Grenze des Sternsystems in der Richtung ω ist. So ergibt sich schließlich:

$$\frac{1}{r_1} = \frac{\pi}{0.2}\left[1 + \frac{\Delta\left(\frac{d\log\pi}{dn}\right)\cdot\frac{d\log A_n}{dn}}{\Delta\left[\frac{d^2\log A}{dn^2}\right]}\right]. \qquad \text{(VII)}$$

Ist also an der aus dem Verlaufe der Abzählungen erkennbaren Stelle $m = n$ die Größe des Sprunges sowohl in $\frac{d^2\log A_m}{dm^2}$ als auch in $\frac{d\log\pi}{dm}$ ermittelt, so ergibt sich aus diesen Daten allein die Entfernung der Grenze r_1 des Sternsystems und zwar eindeutig.

Die wegen ihrer Einfachheit bemerkenswerten Formeln (VI) und (VII) sind nur anwendbar, wenn $\varphi(H) - \chi(H)$ von Null verschieden ist, also auch $\Delta\left(\frac{d^2\log A_m}{dm^2}\right)$. Wird diese Bedingung nicht erfüllt, dann müßten die höheren Differentialquotienten untersucht werden, was indessen kaum zu einfachen Resultaten führen dürfte. Auch rechnerisch würde wohl auf diesem Wege nichts zu erreichen sein, da die dritten Differentialquotienten kaum jemals mit einiger Sicherheit festgestellt werden können. Sucht man die Integralgleichungen durch spezielle Ansätze zu integrieren, so sind die genannten prinzipiellen Schwierigkeiten, wie meine früheren Rechnungen zeigen, behoben. Bisher war es überhaupt nicht möglich, den Sprung in den Zahlen $\frac{d^2\log A_m}{dm^2}$ direkt nachzuweisen. Ich werde später zeigen, daß dies aber nach den neuesten Abzählungsresultaten durchaus

möglich erscheint. Schlimmer steht es mit den mittleren Parallaxen. Die bisher ermittelten müßten erst auf schwächere Sterne ausgedehnt werden. Dazu kommen die sicherlich vorhandenen Unsicherheiten, die meist unterschätzt werden. Man muß immer wieder im Auge behalten, daß die Bestimmung der mittleren Parallaxen namentlich der schwächeren Sterne auf keineswegs ganz einwandfreien Hypothesen beruht.

3.

Die Integralgleichungen (I) bis (IV) sollen nun für den Fall $\chi = 0$ in eine andere Form gebracht werden. Die Gleichung (I), welche für $m < n$ gilt, gibt:

$$\frac{1}{\omega}\frac{dA_m}{dh_m} = -\int_{r_0}^{\sqrt{\frac{H}{h_m}}} A(\varrho)\,\varrho^4\,\varphi(h_m\varrho^2)\,d\varrho .$$

Setzt man nun

$$\zeta = \sqrt{\frac{h_n}{h_m}} < 1, \quad \varrho = \frac{r_1}{\sqrt{\psi_1(r_1)}}\zeta x = \zeta x \sqrt{\frac{H}{h_n}}$$

$$D(\xi) = A\left(\frac{r_1}{\sqrt{\psi_1(r_1)}}\xi\right)\left(\frac{r_1}{\sqrt{\psi_1(r_1)}}\xi\right)^4; \quad \varphi(Hx^2) = \psi(x), \qquad (1)$$

wobei die Extinktionsfunktion mit ψ_1 (statt dem früheren ψ) bezeichnet wird, so wird

$$\frac{1}{\omega}\frac{dA_m}{dh_m} = -r_2\zeta\int_{\frac{r_0}{r_2\zeta}}^{1} D(\zeta x)\,\psi(x)\,dx .$$

Da vorausgesetzt werden soll, daß n bekannt ist, wird $-\frac{1}{\omega}\cdot\frac{1}{\zeta}\cdot\frac{dA_m}{dh_m}$ eine bekannte Funktion $f_1(\zeta)$ von ζ sein. Die Gleichung (I) wird demnach:

$$f_1(\zeta) = r_2\int_{\frac{r_0}{r_2\zeta}}^{1} D(\zeta x)\,\psi(x)\,dx \quad \text{für } \zeta < 1 .$$

Hieraus:

$$\zeta \frac{df_1}{d\zeta} = \frac{r_0}{\zeta} D\left(\frac{r_0}{r_2}\right) \psi\left(\frac{r_0}{r_2 \zeta}\right) + r_2 \int_{\frac{r_0}{r_2 \zeta}}^{1} d \frac{D(\zeta x)}{dx} \cdot x \psi(x)\, dx .$$

Wendet man auf das Integral die teilweise Integration an, so wird:

$$r_2 \cdot D(\zeta)\, \psi(1) = \zeta \frac{df_1}{d\zeta} + r_2 \int_{\frac{r_0}{r_2 \zeta}}^{1} D(\zeta x) \frac{d[x \psi(x)]}{dx}\, dx$$

oder, wenn man $r_2 \cdot D(\zeta)\, \psi(1)$ mit $u(\zeta)$ bezeichnet:

$$\left.\begin{aligned} u(\zeta) &= \zeta \frac{df_1}{d\zeta} + \int_{\frac{r_0}{r_2}}^{\zeta} u(\xi)\, K(\zeta, \xi)\, d\xi \\ K(\zeta, \xi) &= \frac{1}{\zeta \psi(1)} \left[\psi\left(\frac{\xi}{\zeta}\right) + \frac{\xi}{\zeta} \psi'\left(\frac{\xi}{\zeta}\right) \right]. \end{aligned}\right\} \qquad (1\,a)$$

Dies ist eine Integralgleichung der zweiten Art, die bekanntlich durch die C. Neumannsche sukzessive Substitutionsmethode integriert werden kann. Die Integralgleichung (II), die für $m > n$ gilt, läßt sich ganz analog behandeln. Es ist

$$-\frac{1}{\omega} \frac{dA_m}{dh_m} = \int_{r_0}^{\sqrt{\frac{II}{h_n}}} A(\varrho)\, \varrho^4 \varphi(h_m \varrho^2)\, d\varrho .$$

Hierin setze man $\zeta = \sqrt{\frac{h_m}{h_n}} < 1$ und $\varrho = r_2 \xi$, dann wird mit Benützung von (1)

$$-\frac{1}{\omega} \frac{dA_m}{dh_m} = f_2(\zeta) = r_2 \int_{\frac{r_0}{r_2}}^{1} D(\xi)\, \psi(\zeta, \xi)\, d\xi$$

und weiterhin:

$$\zeta \frac{d f_2(\zeta)}{d\zeta} = r_2 \int_{\frac{r_0}{r_2}}^{1} D(\xi) \frac{d\psi(\zeta,\xi)}{d\xi} \xi \, d\xi$$

$$= r_2 \left[D(1)\psi(\zeta) - D\left(\frac{r_0}{r_2}\right) \cdot \left(\frac{r_0}{r_2}\right) \cdot \psi\left(\zeta \frac{r_0}{r_2}\right) \right]$$

$$- r_2 \int_{\frac{r_0}{r_2}}^{1} \psi(\zeta,\xi) \frac{d[\xi D(\xi)]}{d\xi} d\xi .$$

Nach 1) ist aber $D\left(\frac{r_0}{r_2}\right) = \Delta(r_0) r_0^4$. Es werde nun, da dies auch bei den früheren Rechnungen geschehen ist, $\Delta(r_0) = 0$ vorausgesetzt. Man setze:

$$u(\zeta) = r_2 D(1) \psi(\zeta),$$

so wird:

$$\left.\begin{aligned} u(\zeta) &= \zeta \frac{d f_2}{d\zeta} + \int_{\frac{r_0}{r_2}\zeta}^{\zeta} u(\xi) K(\zeta,\xi) \, d\xi \\ K(\zeta,\xi) &= \frac{1}{\zeta D(1)} \cdot \left[D\left(\frac{\xi}{\zeta}\right) + \frac{\xi}{\zeta} D'\left(\frac{\xi}{\zeta}\right) \right]. \end{aligned}\right\} \qquad (2\,a)$$

Bei der Aufstellung der Formel für π_m ist in Betracht zu ziehen, daß $\frac{\pi}{0{,}2} \frac{d A_m}{d h_m}$ als bekannte Funktion von h_m anzusehen ist. Die Formel (III) stimmt mit (I) vollkommen überein, wenn $\Delta\left(\frac{\xi}{f(\xi)}\right)$ statt $\Delta(\xi)$ gesetzt wird. Also ist $D(\xi)$ zu ersetzen durch $D_1(\xi) = \frac{D(\xi)}{f(r_2 \xi)}$ und sonst nichts zu ändern.

Man erhält so:

$$f_3(\zeta) = r_2 \int_{\frac{r_0}{r_2 \zeta}}^{1} D_1(\zeta x) \psi(x) \, dx ; \quad \zeta = \sqrt{\frac{h_n}{h_m}} < 1 .$$

Man hat also:

$$\left.\begin{aligned} u(\zeta) &= r_2 D_1(\zeta)\,\psi(1) = \zeta\frac{df_3}{d\zeta} + \int_{\frac{r_0}{r_2}}^{\zeta} u(\xi)\,K(\zeta,\xi)\,d\xi \\ K(\zeta,\xi) &= \frac{1}{\zeta\,\psi(1)}\cdot\left[\psi\left(\frac{\xi}{\zeta}\right) + \frac{\xi}{\zeta}\,\psi'\left(\frac{\xi}{\zeta}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \quad (3\,a)$$

Und ebenso für die letzte Formel (IV)

$$f_4(\zeta) = r_2 \int_{\frac{r_0}{r_2}}^{1} D_1(\xi)\,\psi(\zeta,\xi)\,d\xi$$

$$\left.\begin{aligned} u(\zeta) &= r_2 D_1(1)\,\psi'(\zeta) = \zeta\frac{df_4}{d\zeta} + \int_{\frac{r_0}{r_2}}^{\zeta} u(\xi)\,K(\zeta,\xi)\,d\xi \\ K(\zeta,\xi) &= \frac{1}{\zeta\,D_1(1)}\left[D_1\left(\frac{\xi}{\zeta}\right) + \frac{\xi}{\zeta}\,D_1'\left(\frac{\xi}{\zeta}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \quad (4\,a)$$

Dieselben Formeln sind natürlich auch für $r_0 = 0$ anwendbar. Es soll diese Annahme für einen Augenblick beibehalten werden. Wie schon erwähnt, sind Integralgleichungen von der Form (1 a) — (4 a) unter der Bedingung der Endlichkeit der auftretenden Funktionen durch die C. Neumannsche Methode durch stets konvergente Reihen auflösbar. Ist:

$$u(\zeta) = \Phi(\zeta) + \int_0^{\zeta} u(\xi)\,K(\zeta,\xi)\,d\xi,$$

so hat man:

$$u(\zeta) = \Phi(\zeta) + F_0(\zeta) + F_1(\zeta) + F_2(\zeta) + \cdots,$$

wo:

$$F_n(\zeta) = \int_0^{\zeta} K(\zeta,\xi_0)\,d\xi_0 \int_0^{\xi_0} K(\xi_0,\xi_1)\,d\xi_1 \int_0^{\xi_1} K(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_2 \cdots \int_0^{\xi_{n-1}} K(\xi_{n-1},\xi_n)\,\Phi(\xi_n)\,d\xi_n.$$

So ist also in (1a)

$$K(\xi_{n-1}, \xi_n) = \frac{1}{\xi_{n-1}\psi'(1)} \left[\frac{d[x\psi(x)]}{dx}\right]_{x=\frac{\xi_n}{\xi_{n-1}}}$$

In einigen speziellen Fällen läßt sich dann das vielfache Integral leicht ausrechnen, z. B. für $\Phi(\zeta) = \zeta^r$. Man findet dann:

$$F_n = \zeta^r (J_r)^n; \text{ wo } J_r = \frac{1}{\psi'(1)} \int_0^1 \frac{d(x \cdot \psi'(x))}{dx} x^r \, dx,$$

so daß $$u(\zeta) = \zeta^r [1 + J_r + J_r^2 + \cdots].$$

Nur wenn $J_r < 1$, konvergiert die Reihe und dann ist:

$$u(\zeta) = \frac{\zeta^r}{1 - J_r},$$

was leicht verifiziert werden kann. In dem andern Fall ist die aufgestellte Reihe unbrauchbar, weil divergent. Man muß also die Voraussetzungen zur Erlangung konvergenter Reihen einhalten. In den Integralgleichungen (1a) bis (4a) muß man die untere Grenze $r_0 = 0$ ausschließen dürfen, um in den Fällen, in denen dies nicht schon an sich stattfindet, eventuell zu erreichen, daß $K(\xi_{n-1}, \xi_n)$ für alle n im ganzen Integrationsintervall endlich bleibt. Gleiches soll von $u(\zeta)$ und selbstverständlich auch von Φ vorausgesetzt werden. Die vier Integrale sind entweder von der Form:

$$\int_{a\xi}^{\xi_m} P \, d\xi \text{ oder } \int_{b\xi}^{\xi_m} P \, d\xi,$$

wobei a und b kleine konstante Größen sind und P endliche Funktionen. Ist der Maximalbetrag etwa Q, so ist im ersten Falle:

$$F_n < Q \frac{(\zeta - a)^{n+1}}{1 \cdot 2 \ldots n},$$

im zweiten:

$$F_n < \frac{Q(1-b)(1-b^2)\ldots(1-b^{n+1})}{1 \cdot 2 \ldots n}$$

und die für $u(\zeta)$ aufgestellte Reihe konvergiert für alle Werte von ζ. Die Funktionen $u(\zeta)$ sind dann bekanntlich eindeutig bestimmt. Daraus ergibt sich also, daß durch die vier Integralgleichungen $r_2 D(\zeta)$ eindeutig durch $\psi(\zeta)$ gegeben ist, ferner $r_2 \psi(\zeta)$ eindeutig durch $D(\zeta)$ und ebenso $r_2 D_1(\zeta)$ durch $\psi(\zeta)$ und $r_2 \psi(\zeta)$ durch $D_1(\zeta)$. Es sind also immer gewisse Gruppen der 3 Funktionen $D(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ und $f(\zeta)$ als zusammengehörig zu betrachten, was man auch ohne die Reduktion auf die zuletzt abgeleiteten Formen direkt leicht einsehen kann. Die vier Integralgleichungen liefern demnach außerdem eine Kontrolle für die zu Grunde gelegten Annahmen. Wenn die Extinktion vernachlässigt wird, so werden schon die drei ersten Gleichungen eine gewisse Überbestimmtheit zeigen, so daß die gegebenen Funktionen f_1, f_2, f_3 nicht beliebig sein dürfen. Der Erfolg der früheren Rechnungen hat, so weit dies durchführbar war, ergeben, daß in der Tat die Beobachtungsresultate genügend dargestellt werden können und es wird später gezeigt werden, daß dies auch für das neue Material zutrifft.

Die letzte Umformung der Integralgleichungen und ihre Auflösung durch das Neumannsche Verfahren wird im allgemeinen, wie es scheint, zu überaus verwickelten Rechnungen führen und man wird nach wie vor durch spezielle Ansätze sich zu helfen trachten müssen. Auch läßt sich nicht ohne weiteres die Eindeutigkeit der Gesamtlösung auf diesem Wege beweisen. Es ist bei solchen Versuchen entschieden einfacher, auf die Gleichungen zurückzugehen, die vor der teilweisen Integration aufgestellt wurden. Dabei soll $r_0 = 0$ gesetzt werden, so daß wir nunmehr haben, indem r_2 mit D bzw. D_1 vereinigt wird.

$$\left.\begin{aligned} f_1(\zeta) &= \int_0^1 D(\zeta x)\, \psi(x)\, dx \\ f_2(\zeta) &= \int_0^1 D(x)\, \psi(\zeta x)\, dx \\ f_3(\zeta) &= \int_0^1 D_1(\zeta x)\, \psi(x)\, dx \\ f_3(\zeta) &= \int_0^1 D_1(x)\, \psi(\zeta x)\, dx \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

Es könnte vielleicht zweifelhaft erscheinen, ob auch für diese Gleichungen der Satz gilt, daß, wenn überhaupt, nur ein System von zugehörigen Funktionen D, D_1, ψ existiert. Es ist sehr leicht, dies nachzuweisen. Denn gehörten zu einem bestimmten positiven ψ zwei Funktionen D und Δ, so würde z. B. aus der ersten Gleichung folgen, wenn $D(\xi) - \Delta(\xi) = \sigma(\xi)$ gesetzt wird.

$$0 = \int_0^1 \sigma(\zeta x)\, \psi(x)\, dx$$

für alle $0 \leqq \zeta \leqq 1$. Daraus folgert man strenge, nach dem Verfahren, welches ich in II, S. 14 angewandt habe, $\sigma = 0$.

Der Beweis, daß, mathematisch gesprochen, nur eine Lösung der vier Gleichungen vorhanden ist, läßt sich führen, wenn die unbekannten Funktionen als eindeutig fortsetzbare analytische angenommen werden. Im folgenden wird es sich um wiederholte Ausführungen von Differentiationen und Anwendung der teilweisen Integration handeln. Es soll dann der Kürze wegen $\dfrac{d^n \Phi(x)}{dx^n}$ für $x = 1$ mit $\Phi^{(n)}$ bezeichnet werden. Ferner soll eine eindeutig bestimmte Größe mit den deutschen Buchstaben $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ etc. gekennzeichnet werden, wodurch nur diese eindeutige Bestimmtheit ausgedrückt werden soll. Weiterhin ist von den folgenden Beziehungen für beliebige Funktionen Gebrauch gemacht worden:

$$\frac{d\Phi(\zeta x)}{d\zeta} = \Phi'(\zeta x) \cdot x; \quad \frac{d\Phi(\zeta x)}{dx} = \Phi'(\zeta x) \cdot \zeta,$$

d. h.

$$\frac{d\Phi(\zeta x)}{d\zeta} = \frac{d\Phi(\zeta x)}{dx} \cdot \frac{x}{\zeta}$$

ebenso ist:

$$\frac{d^2\Phi(\zeta x)}{d\zeta^2} = \Phi''(\zeta x)\, x^2; \quad \frac{d^2\Phi(\zeta x)}{dx^2} = \Phi''(\zeta x)\, \zeta^2$$

und allgemein:

$$\frac{d^n \Phi(\zeta x)}{d\zeta^n} = \frac{d^n \Phi(\zeta x)}{dx^n} \cdot \frac{x^n}{\zeta^n}.$$

Hieraus ergibt sich durch die angedeutete Anwendung von Differentiationen und partieller Integration:

1. $D\psi = f_1 + f_1' + f_2'$
2. $D'\psi - D\psi' = 2f_1'' - 2f_2' + f_1'' - f_2''$
3. $D''\psi - D'\psi' + 3D\psi' + D\psi'' = f_1''' + 3f_1''' + 6f_2' + 6f_2'' + f_2'''$
4. $D''\psi - D'\psi' + 3D'\psi + D\psi'' = f_1''' + 6f_1''' + 6f_1' + 3f_2'' + f_2'''$.

Diese Formeln ergeben sich durch Differentiation der ersten beiden Formeln (A). Ebenso findet man aus der 3. und 4. Gleichung (A):

1'. $D_1\psi = f_3 + f_3' + f_4'$
2'. $D_1'\psi - D_1\psi' = 2f_3' - 2f_4' + f_3'' - f_4''$
3'. $D_1''\psi - D_1'\psi' + 3D_1\psi' + D_1\psi'' = f_3''' + 3f_3'' + 6f_4' + 6f_4'' + f_4'''$
4'. $D_1''\psi - D_1'\psi' + 3D_1'\psi + D_1\psi'' = f_3''' + 6f_3''' + 6f_3' + 3f_4'' + f_4'''$.

Aus den obigen Betrachtungen (S. 107) folgt, wenn, wie jetzt geschieht, D und D_1 statt $r_2 D$ und $r_2 D_1$ gesetzt wird, daß $D_1(\zeta)$ eindeutig gegeben ist durch $D(\zeta)$. Schreibt man also:

$$D_1(\zeta) = D(\zeta) \cdot \mathfrak{A},$$

so folgt:

$$D_1^{(n)} = \mathfrak{A} D^{(n)} + n\mathfrak{A}' D^{(n-1)} + \binom{n}{2}\mathfrak{A}'' D^{(n-2)} + \cdots \mathfrak{A}^{(n)} D,$$

also:

$$\left.\begin{aligned} D_1 &= \mathfrak{A} D \\ D_1' &= \mathfrak{A} D' + D\mathfrak{A}' \\ D_1'' &= \mathfrak{A} D'' + 2\mathfrak{A}' D' + \mathfrak{A}'' D. \end{aligned}\right\} \qquad (\gamma)$$

Multipliziert man diese drei Gleichungen der Reihe nach mit $\psi'' + 3\psi'$, $-\psi'$ und ψ und addiert, so wird nach 3')

$$\mathfrak{A} D''\psi + D'(2\mathfrak{A}'\psi - \mathfrak{A}\psi') + D(\mathfrak{A}''\psi - \mathfrak{A}'\psi' + \mathfrak{A}\psi'' + 3\mathfrak{A}\psi') = \mathfrak{B}.$$

Dividiert man durch $D_1\psi = D\mathfrak{A}\psi =$ einer Größe von der Art $\mathfrak{A}$, so hat man also:

$$D_1 \psi' = \mathfrak{A}\, D\psi'$$

$$\frac{D''}{D} + \frac{D'}{D}\left[2\frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{A}} - \frac{\psi''}{\psi'}\right] + \frac{\mathfrak{A}''}{\mathfrak{A}} - \frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{A}}\frac{\psi''}{\psi'} + \frac{\psi'''}{\psi'} + 3\frac{\psi''}{\psi'} = \mathfrak{B}_1,$$

während 3. gibt:

$$\frac{D''}{D} - \frac{D'}{D}\frac{\psi''}{\psi'} + \frac{\psi'''}{\psi'} + 3\frac{\psi''}{\psi'} = \mathfrak{C}.$$

Durch Subtraktion ergibt sich:

$$2\frac{D'}{D}\frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{A}} + \frac{\mathfrak{A}''}{\mathfrak{A}} - \frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{A}}\frac{\psi''}{\psi'} = \mathfrak{A}_1.$$

Danach ist also auch:

$$2\frac{D'}{D} - \frac{\psi''}{\psi'} = \mathfrak{B}$$

und da nach 2. $\dfrac{D'}{D} - \dfrac{\psi''}{\psi}$ eindeutig bekannt ist, ist es auch $\dfrac{D'}{D}$ und $\dfrac{\psi''}{\psi'}$.

Wenn man also bis f''' fortgeschritten ist, sind

$$D\psi', \quad \frac{D'}{D}, \quad \frac{\psi''}{\psi'} \text{ und } \frac{D''}{D} + \frac{\psi'''}{\psi'}$$

als eindeutig bestimmt erkannt und dieselben Größen, wenn D_1 an Stelle von D gesetzt wird. Es soll nun folgender Satz bewiesen werden:

Wenn bei Benützung der Differentialquotienten f' bis $f^{(n-1)}$ als eindeutig bestimmt die Größen

$$\frac{D'}{D}, \quad \frac{D''}{D} \cdots \frac{D^{(n-3)}}{D}, \text{ ferner } D\psi', \quad \frac{\psi''}{\psi'} \cdots \frac{\psi^{(n-3)}}{\psi'}$$

und

$$\frac{D^{(n-2)}}{D} + (-1)^{n-2}\frac{\psi^{(n-2)}}{\psi'}$$

erscheinen und dasselbe auch für D_1 gilt, so sind durch die weiteren Differentialquotienten $f^{(n)}$ auch die Größen

$$\frac{D^{(n-2)}}{D}, \quad \frac{\psi^{(n-2)}}{\psi'} \text{ und } \frac{D^{(n-1)}}{D} + (-1)^{n-1}\frac{\psi^{(n-1)}}{\psi'} \text{ bestimmt.}$$

Allgemein ist:

$$\zeta^n f_1^{(n)}(\zeta) = \int_0^1 \frac{d^n D(\zeta x)}{d x^n} \cdot x^n \psi(x)\, d x$$

$$= D^{(n-1)}(\zeta)\, \psi(1) - \int_0^1 \frac{d^{n-1} D(\zeta x)}{d x^{n-1}} \cdot \frac{d[x^n \psi(x)]}{d x}\, d x$$

und wenn man diese Operation weiter fortführt und dann $\zeta = 1$ setzt:

$$f_1^{(n)} = D^{(n-1)} \cdot \psi - D^{(n-2)} \frac{d[x^n \psi(x)]}{d x}\Big|_{x=0}^{x=1} + D^{(n-3)} \cdot \frac{d^2[x^n \psi(x)]}{d x^2}\Big|_{x=0}^{x=1} + \cdots$$

$$+ (-1)^{n-1} \cdot D \frac{d^{n-1}[x^n \psi(x)]}{d x^{n-1}}\Big|_{x=0}^{x=1} + (-1)^n \int_0^1 D \frac{d^n [x^n \psi(x)]}{d x^n}\, d x.$$

Ferner ist:

$$\frac{d^m [x^n \psi(x)]}{d x^m} = n(n-1) \ldots (n-m+1) x^{n-m} \psi(x)$$

$$+ \binom{m}{1} n(n-1) \ldots (n-m+2) x^{n-m+1} \psi'(x)$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$+ \binom{m}{m-1} n \cdot 1 \; x^{n-1} \psi^{(m-1)}(x)$$

$$+ \binom{m}{m} \cdot 1 \; x^n \psi^{(m)}(x).$$

Nach der 2. Integralgleichung A) ist aber

$$f_2^{(p)} = \int_0^1 D(x) x^p \frac{d^p \psi(x)}{d x^p},$$

also eine $\mathfrak{A}$-Größe. In dem Ausdruck für $f_1^{(n)}$ kann man voraussetzungsgemäß als bekannt fortlassen alle Größen $\Delta^{(p)} \psi^{(q)}$, wenn p und $q < n-3$. Außerdem ist $D^{(n-2)} \psi + (-1)^{n-2} \psi^{(n-2)}$ als bekannt anzusehen. Der gefundene Ausdruck für $f_1^{(n)}$ sagt also aus, daß:

$$D^{(n-1)}\psi' - D^{(n-2)}[n\cdot\psi' + \psi^{(1)}] + (-1)^{n-2}D^{1}\psi^{(n-2)} + (-1)^{n-1}D[n(n-1)\psi^{(n-2)} + \psi^{(n-1)}] \qquad (\alpha)$$

eine $\mathfrak{A}$-Größe ist. Dieselbe Formel gilt, wenn man D mit D_1 vertauscht. Nach der obigen Formel (γ) haben wir in (α) dann, wieder mit Fortlassung der $\mathfrak{A}$-Größen, zu setzen:

$$\left.\begin{aligned}
D_1^{(n-1)}\psi' &= \mathfrak{A}\,D^{(n-1)}\psi' + \binom{n-1}{1}\mathfrak{A}'\,D^{(n-2)}\psi'\\
D_1^{(n-2)}\psi' &= \mathfrak{A}\,D^{(n-2)}\psi'\\
D_1^{(n-2)}\psi^{(1)} &= \mathfrak{A}\,D^{(n-2)}\psi^{(1)}\\
D_1\psi^{(n-2)} &= \mathfrak{A}\,D^{1}\psi^{(n-2)} + \mathfrak{A}^{(1)}D\,\psi^{(n-2)}\\
D_1\psi^{(n-2)} &= \mathfrak{A}\,D\,\psi^{(n-2)}\\
D_1\psi^{(n-1)} &= \mathfrak{A}\,D\,\psi^{(n-1)}.
\end{aligned}\right\} \qquad (\beta)$$

Die Formel (α) kann man übersichtlicher schreiben:

$$(D^{(n-1)}\psi' + (-1)^{n-1}D\,\psi^{(n-1)}) - n\,D^{(n-2)}\psi' + (-1)^{n-1}\cdot n(n-1)D^{(n-2)}\psi - D^{(n-2)}\psi^{(1)} + (-1)^{n-2}D^{1}\psi^{(n-2)} = \mathfrak{A}.$$

Benützt man die Formeln (β) und dividiert durch $\mathfrak{A}$, so ergibt sich für gerade n

$$(D^{(n-1)}\psi' - D\,\psi^{(n-1)}) - (D^{(n-2)}\psi^{(1)} - D^{1}\psi^{(n-2)}) + D^{(n-2)}\psi\left(\frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{A}}(n-1) - n\right) + D\,\psi^{(n-2)}\left(\frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{A}} - n(n-1)\right) = \mathfrak{A}.$$

Da aber $D^{(n-2)}\psi' + D\,\psi^{(n-2)} = \mathfrak{B}$ sein soll, so ist nunmehr:

$$(D^{(n-1)}\psi' - D\,\psi^{(n-1)}) - (D^{(n-2)}\psi^{(1)} - D^{1}\psi^{(n-2)}) - D\,\psi^{(n-2)}(n-2)\left(\frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{A}} + n\right) = \mathfrak{B}$$

und ebenfalls für gerade n ergibt (β):

$$(D^{(n-1)}\psi' - D\,\psi^{(n-1)}) - (D^{(n-2)}\psi^{(1)} - D^{1}\psi^{(n-2)}) - D\,\psi^{(n-2)}\cdot n(n-2) = \mathfrak{B}_1.$$

Hieraus folgt, daß $D\,\psi^{(n-2)}$ und also auch $D^{(n-2)}\psi'$ bekannt sind und schließlich auch $D^{(n-1)}\psi' - D\,\psi^{(n-1)}$. Der angekündigte Satz ist damit bewiesen, da für ungerade n eine

ganz ähnliche Rechnung zu machen ist. Der Verlauf der analytisch fortsetzbaren Funktionen D, D_1 und ψ ist also vollkommen gegeben durch die Werte $D(1)$, $D_1(1)$ und $\psi(1)$. Außerdem sind, wie wir gesehen haben, D_1 und D eindeutig bestimmt durch $\psi(1)$. Dies ist eine Konstante. Man hat noch zu beachten, daß die Häufigkeitsfunktion $\varphi(i)$ so gewählt war, daß $\int_0^{II} \varphi(i)\, di = 1$ angesetzt wurde. Außerdem ist auf die Betrachtungen des Artikels 2 zu verweisen, nach welchem gerade die Grenze des Sternsystems r_1 eindeutig durch den Betrag des Sprunges in den 2. Differentialquotienten von A und π bestimmt wurde.

4.

Die Annahme, daß in den Sternzahlen bei einer bestimmten Größe $m = n$ irgend eine Unstetigkeit auftritt, war an sich naheliegend, wenn für die hellen Sterne $\log a$ wirklich konstant war (was auch nach dem neuen Material der Fall ist), während für größere m ein wesentlich kleinerer Wert herauskam. Denn dann könnte sicher A_m nicht durch eine einzige analytische Formel für alle m dargestellt werden. Solche rein mathematischen Kriterien lassen sich an einem empirisch gegebenen Material nicht strenge nachweisen, insbesondere da dieser Nachweis, wie ich stets hervorgehoben habe, eine recht hohe Genauigkeit der Abzählungsresultate voraussetzen muß, die früher nicht erlangt werden konnte und auch jetzt noch keineswegs genügend weit gediehen ist. Man konnte früher nicht mehr zu erreichen hoffen als den Nachweis, daß die Annahme von Diskontinuitäten mit den empirischen Daten nicht in Widerspruch stand. Meinen früheren Rechnungen lagen nur die Resultate aus den Abzählungen nach der Bonner D. M. in Verbindung mit photometrischen Messungen der Harvard-Sternwarte zu Grunde, die beide von systematischen Ungenauigkeiten nicht frei sind, und den Herschelschen Eichungen. Ich habe selbst immer wieder auf die große Lücke hingewiesen, die zwischen etwa den Größen 9 bis 13 klafft, wo gerade die

Entscheidung über die Zulässigkeit verschiedener Annahmen liegt. Diese Lücke ist, wie schon erwähnt, neuerdings durch Beobachtungen auszufüllen versucht worden, deren Resultate Herr Schouten zusammengestellt hat. Er hat ebenfalls die Abzählungsresultate, wie ich es getan habe, nach Milchstraßenzonen geordnet, nur hat er, wohl recht unnötigerweise, die Milchstraßenzone mit I und die den Pol der Milchstraße enthaltende mit V bezeichnet, während bei mir die Reihenfolge der Nummern umgekehrt war. Sicher ist, daß dieses neue Material noch ziemlich deutlich hervortretende systematische und zufällige Ungenauigkeiten enthält, deren Beurteilung nicht gerade erleichtert wird durch den Umstand, daß die als „beobachtet" gegebenen Anzahlen schon eine zum Teil durchgreifende Ausgleichung erfahren zu haben scheinen, die selbstverständlich nicht ohne gewisse Annahmen geleistet werden kann. Ich habe vor solchen weit ausholenden Ausgleichungen stets gewarnt, weil hiedurch gewisse für die Interpretation wichtige reale Schwankungen verdeckt werden können. Es ist deshalb von besonderer Wichtigkeit, daß im vorliegenden Falle diese Verdunkelung nicht vollkommen zustande gekommen ist, denn die Zahlen A_m deuten sehr bestimmt auf eine Schwankung für $m = 9 - 10$ hin, die ganz ähnlich verläuft, wie eine Unstetigkeit im 2. Differentialquotienten erfordert. Es ist nur durch die vorgefaßten Meinungen, die Herrn Sch. offenbar bei seinen Zusammenstellungen geleitet haben, erklärlich, daß er nicht selbst diese Vorkommnisse bemerkt hat. Zuerst möchte ich eine Bemerkung mitteilen, die sofort in die Augen fällt und die auch Herrn Deutschland selbstverständlich nicht entgangen ist. Der a. a. O. gemachte Versuch, die Zahlen $\log A_m$ bis $m = 15$ oder 16 durch eine quadratische Form von m darzustellen, muß als vollkommen gescheitert angesehen werden. Die Abweichungen weisen so enorme Beträge auf und zeigen einen so ausgesprochenen systematischen Gang, daß schon die Mitteilung solcher Versuche Verwunderung erregen muß, wenn nicht gleich die Unzulässigkeit solcher Ansätze hervorgehoben wird. Vielmehr ist auf den ersten Blick zu

sehen, daß man zwei verschiedene Formeln annehmen muß, von denen die eine bis zu einem gewissen Wert $m \leq n$ und die andere für $m > n$ gültig ist. Im Sinne meiner Annahmen müßte eine solche quadratische Form für $m > n$, wenn n die die Grenze des Sternsystems bestimmende Größe ist, einen wesentlich verschiedenen Koeffizienten von m^2 aufweisen wie für $m < n$, während die beiden andern Koeffizienten übereinstimmen müßten. Das letztere ist natürlich eine ideale Forderung, die ebensowenig absolut genau erfüllt zu sein braucht, wie auch die gemachten Annahmen nicht genau erfüllt sein werden. Tatsächlich gelangt man selbst unter diesen sehr einschränkenden Bedingungen zu einer ganz genügenden Darstellung. Es soll dies für die auf dem ganzen Himmel vorhandenen Sternzahlen A_m auf einem Quadratgrade gezeigt werden. Ohne auf eine möglichst gute Darstellung Bedacht zu nehmen, ergab eine beiläufige Rechnung die Formel:

$$f = \log A_m = +0.764 + 0.4700\,(m - 9.5) - 0.0048\,(m - 9.5)^2 \quad \ldots\ m < 9.5$$

$$= +0.764 + 0.4700\,(m - 9.5) - 0.01734\,(m - 9.5)^2 \quad \ldots\ m > 9.5.$$

Die Übereinstimmung mit den „beobachteten" Werten Sch. ergibt die folgende Tabelle:

m	f	Sch.	Δ	m	f	Sch.	Δ
2.0	— 3.031	— 3.020	+ 11	9.5	+ 0.764	+ 0.764	0
2.5	— 2.761	— 2.755	+ 6	10.5	+ 1.217	+ 1.212	— 5
3.5	— 2.229	— 2.229	0	11.5	+ 1.635	+ 1.629	— 6
4.5	— 1.706	— 1.708	— 2	12.5	+ 2.018	+ 2.011	— 7
5.5	— 1.193	— 1.195	— 2	13.5	+ 2.367	+ 2.366	— 1
6.5	— 0.689	— 0.689	0	14.5	+ 2.681	+ 2.693	+ 12
7.5	— 0.195	— 0.194	+ 1	15.5	+ 2.960	+ 3.008	(+ 48)
8.5	+ 0.289	+ 0.290	+ 1				

Die Verschiedenheiten der Koeffizienten von m^2 in beiden Formeln erzeugt für $m = 14.5$ bereits 0.314, also ein gänzlich abweichendes Resultat. Noch ist zu bemerken, worauf ich noch zurückkommen werde, daß eine genauere Verfolgung dieser Umstände zunächst nicht möglich ist, was leider weitere

Betrachtungen sehr erschwert und unsicher macht, weil nämlich bei ungefähr $m = 9.5$ eine offenbar aus der Art der Bearbeitung entstandene Ungleichförmigkeit und zwar in allen Zonen vorhanden ist. Man kann z. B. nicht sagen, ob nicht bei $m > 9.5$ für alle $\log A_m$ eine konstante Korrektion von etwa $+ 0.030$ anzunehmen ist. Doch scheint dies nicht unwahrscheinlich zu sein. In der obigen Tabelle habe ich diese Korrektion zu $+ 0.027$ angenommen. Die Größe dieser Korrektion, deren Notwendigkeit an sich kaum zu bezweifeln ist, hat aber großen Einfluß auf die Übereinstimmung mit Resultaten, die auf anderem Wege erreichbar sind. Die genannte Korrektion scheint auch angedeutet in den Abzählungen, die Herr Nort nach den Harvard-Beobachtungen gemacht hat. Dort findet sich für $m = 11.0$, $\log A_m = 1.417$, während Sch. 1.395 angibt. Doch dürfte die Sachlage keineswegs klar liegen. In jedem Falle ist, wie aus der folgenden Tabelle der Sch.-Werte hervorgeht, bei $m = 9.5$ eine auffallende Störung vorhanden, die, von allen Hypothesen abgesehen, eine Aufklärung erfordert, und es wäre dringend erwünscht, gerade die Anzahl der Sterne von der Größe 9.0 oder 9.5 ab bis 10.5 einer genauen Revision zu unterwerfen. Auch die Gleichmäßigkeit der Störung in allen Zonen deutet darauf hin, daß hier in der Bearbeitung nicht die nötige Unabhängigkeit der Feststellungen in verschiedenen Himmelsteilen gewaltet hat. Es unterliegt keinem Zweifel, daß genauere Feststellungen gerade an der bezeichneten Stelle von größter Wichtigkeit sind, wenn sie auch gegenwärtig noch nicht durchführbar sind. Wenn sie trotzdem mit aller Reserve durchgeführt werden sollen, so geschieht dies in der Absicht, die Anforderungen, die an das Material zu stellen sind, genauer zu präzisieren und zu zeigen, wie die Durchführung der Rechnung nach den von mir aufgestellten Gesichtspunkten zu erfolgen hat.

Überblickt man die Zahlen der Werte $\log A_m$, so geht, und das ist zunächst das Wichtigste, mit der größten Deutlichkeit hervor, daß in der Gegend $m = 9.5$ etwa eine plötzliche Veränderung im 2. Differentialquotienten stattfindet. Es

ist ganz natürlich, daß diese Tatsache besonders in den sternreicheren Zonen wohl außer Zweifel gestellt ist, was ja auch die obige Betrachtung über die Zahlen für alle Sterne ergibt. Die zweiten Differenzen, die durchweg negativ sind, sind für $m < 9.5$ insbesondere in der Nähe der kritischen Stelle dem absoluten Werte nach stets kleiner wie nachher und der Übergang ist sehr rasch und fast sprunghaft. Den Betrag dieses Sprunges abzuleiten ist natürlich insbesondere deshalb erschwert, weil eben, wie erwähnt, an der kritischen Stelle noch eine andere Störung stattgefunden hat, die nicht zweifellos feststellbar ist. Um wenigstens einen ungefähren Überblick zu gewinnen, habe ich das selbstverständlich nicht ganz einwandfreie Verfahren eingeschlagen, das aber den Vorteil hat, von der unsicheren Störung einigermaßen unabhängig zu sein, daß ich das Mittel M_- von 4 zweiten Differenzen vor und M_+ von 4 solchen nach der kritischen Stelle bildete. Die Differenz der beiden M gibt dann, mit 4 multipliziert, den Sprung Δ im 2. Differentialquotienten.

Zone	M_-	M_+	Δ
V	— 0.00125	— 0.00875	+ 0.030
IV	— 0.00238	— 0.00850	+ 0.025
III	— 0.00375	— 0.00875	+ 0.020
II	— 0.00525	— 0.01025	+ 0.020
I	— 0.00675	— 0.01100	+ 0.017
alle Sterne	— 0.00250	— 0.00850	+ 0.024

Die Zahlen sind recht sicher mit Ausnahme der für die Zonen I und II. Für alle Sterne stimmt Δ übrigens überein mit dem Resultat der oben gegebenen Interpolationsformeln, wie zu erwarten war. Indessen mögen die Werte Δ in Wirklichkeit merklich größer sein, wenn es sich bestätigen sollte, daß man von $m = 9.5$ ab eine konstante Korrektion, die zu bestimmen ist, einführen darf. Korrigiert man diese log A_m für alle Sterne z. B. um + 0.037, so zeigen die 2. Differenzen eine starke Vergrößerung ganz in der Nähe von $m = 9.5$ (vgl. S. 121).

Zone V (E, Milchstraße)				Zone IV (D)			
m	$\log A_m$	I	II	m	$\log A_m$	I	II
2.0	— 2.900			2.0	— 2.942		
2.5	— 2.632	+ 268	— 1	2.5	— 2.682	+ 260	— 2
3.0	— 2.365	+ 267	+ 1	3.0	— 2.424	+ 258	— 1
3.5	— 2.097	+ 268	0	3.5	— 2.167	+ 257	— 1
4.0	— 1.829	+ 268	— 2	4.0	— 1.911	+ 256	— 1
4.5	— 1.563	+ 266	— 1	4.5	— 1.656	+ 255	— 2
5.0	— 1.298	+ 265	— 3	5.0	— 1.403	+ 253	— 2
5.5	— 1.036	+ 262	+ 1	5.5	— 1.152	+ 251	— 2
6.0	— 0.773	+ 263	— 2	6.0	— 0.903	+ 249	0
6.5	— 0.512	+ 261	— 2	6.5	— 0.654	+ 249	— 2
7.0	— 0.253	+ 259	— 3	7.0	— 0.407	+ 247	— 2
7.5	+ 0.003	+ 256	— 1	7.5	— 0.162	+ 245	— 3
8.0	+ 0.258	+ 255	— 1	8.0	+ 0.080	+ 242	— 2
8.5	+ 0.512	+ 254	— 1	8.5	+ 0.320	+ 240	— 2
9.0	+ 0.765	+ 253	— 2	9.0	+ 0.558	+ 238	— 2
9.5	+ 1.016	+ 251	— 38	9.5	+ 0.794	+ 236	— 35
10.0	+ 1.229	+ 213	+ 22	10.0	+ 0.995	+ 201	+ 19
10.5	+ 1.464	+ 235	— 9	10.5	+ 1.215	+ 220	— 7
11.0	+ 1.690	+ 226	— 5	11.0	+ 1.428	+ 213	— 6
11.5	+ 1.911	+ 221	— 11	11.5	+ 1.635	+ 207	— 10
12.0	+ 2.121	+ 210	— 10	12.0	+ 1.832	+ 197	— 11
12.5	+ 2.321	+ 200	— 7	12.5	+ 2.018	+ 186	— 8
13.0	+ 2.514	+ 193	— 2	13.0	+ 2.196	+ 178	— 2
13.5	+ 2.705	+ 191	— 15	13.5	+ 2.372	+ 176	— 12
14.0	+ 2.881	+ 176	— 1	14.0	+ 2.536	+ 164	— 2
14.5	+ 3.056	+ 175	— 4	14.5	+ 2.698	+ 162	— 3
15.0	+ 3.227	+ 171	— 3	15.0	+ 2.857	+ 159	— 4
15.5	+ 3.395	+ 168		15.5	+ 2.012	+ 155	

Zone III (C)

m	log A_m	I	II
2.0	— 3.054		
		+ 260	
2.5	— 2.794		— 1
		+ 259	
3.0	— 2.535		— 2
		+ 257	
3.5	— 2.278		— 2
		255	
4.0	— 2.023		— 1
		254	
4.5	— 1.769		— 2
		252	
5.0	— 1.517		— 3
		249	
5.5	— 1.268		— 3
		246	
6.0	— 1.022		— 1
		245	
6.5	— 0.777		— 3
		242	
7.0	— 0.535		— 3
		239	
7.5	— 0.296		— 3
		236	
8.0	— 0.060		— 3
		233	
8.5	+ 0.173		— 4
		229	
9.0	+ 0.402		— 5
		224	
9.5	+ 0.626		— 36
		188	
10.0	+ 0.814		+ 19
		207	
10.5	+ 1.021		— 7
		200	
11.0	+ 1.221		— 9
		191	
11.5	+ 1.412		— 9
		182	
12.0	+ 1.594		— 10
		172	
12.5	+ 1.766		— 8
		164	
13.0	+ 1.930		— 3
		161	
13.5	+ 2.091		— 14
		147	
14.0	+ 2.238		— 2
		145	
14.5	+ 2.383		— 4
		141	
15.0	+ 2 524		— 4
		137	
15.5	+ 2.661		

Zone II (B)

m	log A_m	I	II
2.0	— 3.199		
		+ 274	
2.5	— 2.925		— 2
		+ 272	
3.0	— 2.653		— 3
		+ 269	
3.5	— 2.384		— 2
		+ 267	
4.0	— 2.117		— 3
		+ 264	
4.5	— 1.853		— 3
		+ 261	
5.0	— 1.592		— 4
		+ 257	
5.5	— 1.335		— 4
		+ 253	
6.0	— 1.082		— 4
		+ 249	
6.5	— 0.833		— 4
		+ 245	
7.0	— 0.588		— 5
		+ 240	
7.5	— 0.348		— 6
		+ 234	
8.0	— 0.114		— 6
		+ 228	
8.5	+ 0.114		— 5
		+ 223	
9.0	+ 0.337		— 4
		+ 219	
9.5	+ 0.556		— 36
		+ 183	
10.0	+ 0.739		+ 15
		+ 198	
10.5	+ 0.937		— 10
		+ 188	
11.0	+ 1.125		— 9
		+ 179	
11.5	+ 1.304		— 12
		+ 167	
12.0	+ 1.471		— 10
		+ 157	
12.5	+ 1.628		— 7
		+ 150	
13.0	+ 1.778		— 9
		+ 141	
13.5	+ 1.919		— 11
		+ 130	
14.0	+ 2.049		— 3
		+ 127	
14.5	+ 2.176		— 4
		+ 123	
15.0	+ 2.299		— 6
		+ 117	
15.5	+ 2.416		

Zone I (A, Pol)				alle Sterne			
m	log A_m	I	II	m	log A_m	I	II
2.0	— 3.278			2.0	— 3.020		
		+ 284				+ 265	
2.5	— 2.994		— 3	2.5	— 2.755		— 2
		+ 281				+ 263	
3.0	— 2.713		— 3	3.0	— 2.492		0
		+ 278				+ 263	
3.5	— 2.435		— 2	3.5	— 2.229		— 1
		+ 276				+ 262	
4.0	— 2.159		— 4	4.0	— 1.967		— 3
		+ 272				+ 259	
4.5	— 1.887		— 4	4.5	— 1.708		— 1
		+ 268				+ 258	
5.0	— 1.619		— 6	5.0	— 1.450		— 3
		+ 262				+ 255	
5.5	— 1.357		— 4	5.5	— 1.195		— 1
		+ 258				+ 254	
6.0	— 1.099		— 7	6.0	— 0.941		— 2
		+ 251				+ 252	
6.5	— 0.848		— 5	6.5	— 0.689		— 3
		+ 246				+ 249	
7.0	— 0.602		— 6	7.0	— 0.440		— 3
		+ 240				+ 246	
7.5	— 0.362		— 6	7.5	— 0.194		— 3
		+ 234				+ 243	
8.0	— 0.128		— 7	8.0	+ 0.049		— 2
		+ 227				+ 241	
8.5	+ 0.099		— 7	8.5	+ 0.290		— 3
		+ 220				+ 238	
9.0	+ 0.319		— 7	9.0	+ 0.528		— 2
		+ 213				+ 236	
9.5	+ 0.532		— 36	9.5	+ 0.764		— 36
		+ 177				+ 200	
10.0	+ 0.709		+ 13	10.0	+ 0.964		+ 20
		+ 190				+ 220	
10.5	+ 0.899		— 10	10.5	+ 1.184		— 9
		+ 180				+ 211	
11.0	+ 1.079		— 10	11.0	+ 1.395		— 5
		+ 170				+ 206	
11.5	+ 1.249		— 12	11.5	+ 1.601		— 10
		+ 158				+ 196	
12.0	+ 1.407		— 12	12.0	+ 1.797		— 10
		+ 146				+ 186	
12.5	+ 1.553		— 8	12.5	+ 1.983		— 8
		+ 138				+ 178	
13.0	+ 1.691		— 6	13.0	+ 2.161		— 1
		+ 132				+ 177	
13.5	+ 1.823		— 13	13.5	+ 2.338		— 13
		+ 119				+ 164	
14.0	+ 1.942		— 3	14.0	+ 2.502		— 1
		+ 116				+ 163	
14.5	+ 2.058		— 7	14.5	+ 2.665		— 4
		+ 109				+ 159	
15.0	+ 2.167		— 4	15.0	+ 2.824		— 3
		+ 105				+ 156	
15.5	+ 2.272			15.5	+ 2.980		

m	Sch.	I	II
8.0	+ 0.049		
8.5	0.290	+ 241	
9.0	0.528	+ 238	— 3
9.5	0.764	+ 236	— 2
10.0	1.001	+ 237	+ 1
10.5	1.221	+ 220	— 17
11.0	1.432	+ 211	— 9
11.5	1.638	+ 206	— 5

Aus diesem Beispiel ist zu ersehen, daß zur Feststellung der Größe des Sprunges ziemlich hohe Anforderungen gestellt werden; aber wenn die offenbaren Ungenauigkeiten ermittelt sein werden, ist eine ungefähre Bestimmung und zwar am sichersten durch aufzustellende Interpolationsformeln, wie sie schon oben beispielsweise ausgeführt worden sind, ziemlich sicher zu erreichen. Das neue Material hat aber auch schon jetzt die Möglichkeit, die Angaben über die Ausdehnung des Sternsystems sicherer gestalten zu können, dargetan und die Tatsache, daß sich in der Tat die Endlichkeit des Systems beweisen läßt, ist gegen unberufene Kritik festgestellt. Das ist immerhin ein Fortschritt, wenn auch das Problem quantitativ noch nicht endgültig gelöst ist und naturgemäß mehr oder weniger bedeutende Korrekturen der Zahlenresultate der Zukunft vorbehalten bleiben müssen.

Was die recht bedeutenden Abweichungen der $\log A_m$ für große m gegenüber den Herschelschen Angaben betrifft, so rühren diese jedenfalls zum Teil davon her, daß man früher in der Hauptsache nur auf die nördliche Himmelshalbkugel angewiesen war. Es ist immerhin noch sehr zu bezweifeln, ob die Angaben für die südliche Halbkugel die genügende Sicherheit besitzen, die eine Mittelbildung ganz gerechtfertigt erscheinen läßt. Die Hauptursache der Divergenz bilden aber wohl die Angaben für die Milchstraße. Bei ihrer verwickelten Struktur ist es notwendig, an viel mehr Stellen zu beobachten, als geschehen ist. Die Milchstraße in den südlichen Gegenden

hat offenbar ein Aussehen, das recht verschieden von dem in den nördlichen ist, und die räumliche Ausdehnung mag so sehr variieren, daß es schwer wird, die mittlere Ausdehnung zu definieren. Auch hat W. Herschel offenbar die sternreichsten Stellen mehr bevorzugt als J. Herschel, wie auch meine Bearbeitung der beiderseitigen Resultate ergeben hat. Sicher ist aber, daß die Grenzen des Sternsystems sich in der Zone V an einzelnen Stellen weit hinausschieben über die, welche die Mittelzahlen angeben.

Die Eichungen der beiden Herschel ergaben nach meinen Ermittlungen, wie ich sie benutzt hatte, für die Anzahl A der Sterne auf dem Quadratgrad für den ganzen Himmel:

Mittel aus W. und J. Herschel $\log A = 2.818$
J. Herschel $= 2.713.$

Um diese Zahlen mit Sch. vergleichen zu können, muß die Korrektion angebracht werden, welche aus der Verschiedenheit der photographischen und okularen Größen folgt. Diese Korrektion ist aber zunächst nicht recht bestimmbar. Schon für die helleren Sterne schwankt sie in den einzelnen Zonen erheblich. Für die schwachen Herschelschen Sterne werde nun die oben gefundene Korrektion von $+ 0.085$ angenommen, was natürlich nur eine mehr oder weniger willkürliche Annahme ist. Die obigen Zahlen werden dadurch in 2.903 und 2.798 verändert. Soll also durch die Herschel dieselbe Anzahl herauskommen, wie sie Sch. angibt, dann würde die Größe der Herschelschen Sterne mindestens zu 15.3 bzw. 14.9 anzusetzen sein. Die Berücksichtigung der atmosphärischen Extinktion, deren Einfluß auf die Herschelschen Zonen bisher noch nicht untersucht worden ist, würde diese Zahlen noch etwas vergrößern. Für die Milchstraße finde ich für die analogen Größen für W. Herschel. Mittel aus W. und J. Herschel und für J. Herschel 15.7; 15.3; 14.7. Darnach würden die Herschelschen Sterne, denen man bisher knapp die Größe 14 zuerteilt hat, auffallend schwach sein und den bisherigen Ansichten über die Lichtstärke des 20-Füßers oder die Lichtempfind-

lichkeit der Augen der Beobachter kaum entsprechen. Die Herschelschen Zahlen beziehen sich demnach sehr wahrscheinlicherweise auf einen anderen mittleren Zustand, als ihn die an vielleicht zu wenigen Stellen des Himmels ausgeführten Abzählungen definieren. Namentlich in der Milchstraße müßte, wie schon erwähnt, der überwiegend größte Teil des Areales in Betracht gezogen werden, um das typische Sternsystem genügend feststellen zu können.

5.

Wie ich schon erwähnte, gibt das neue Material wohl eine sehr schätzbare Erweiterung unserer Kenntnisse über die Zahlen A_m. Aber es enthält doch an den wichtigsten Stellen nicht unerhebliche Unvollkommenheiten. Wenn ich trotzdem weitere Rechnungen im Sinne meiner früheren Untersuchungen anschließe, so geschieht dies aus dem Grunde, weil es mir von Wichtigkeit erscheint, nachzuweisen, daß ein Widerspruch gegen meine Ansätze nach keiner Richtung berechtigt ist. Sogar die von mir gebrauchten ganz speziellen Ansätze, deren eventuelle Umänderung ich stets als nicht von der Hand zu weisend bezeichnet habe, brauchen nicht geändert werden. Damit sind von vornherein alle Einwände dagegen hinfällig, die vielleicht vorzubringen versucht werden könnten. Ich will zunächst die mittleren Parallaxen von neuem ableiten, obwohl hier kein wesentliches neues Material vorliegt. Daß dagegen die neuen Werte für log A_m in den Zahlenresultaten Veränderungen hervorbringen müssen, ist selbstverständlich. Für die m. Parallaxen (aus allen Zonen) habe ich dieselben Formeln in III und IV benutzt und auch an den angenommenen Werten der Konstanten nur geringfügige Änderungen vorgenommen, und zwar solche, welche in Verbindung mit den weiteren Rechnungen ein einheitliches System bilden. Deshalb war die Neurechnung nötig, wobei es aber auf Mitteilung von Einzelheiten nicht ankommen kann.

Ich nehme also an:

$$k = \frac{1}{4.8};\ H \text{ entsprechend der Größe } -4.3;\ b = 53.875,$$

d. h.

$$\sigma(\mu) = 4.3122 - \frac{6}{5}\mu;\ \sigma(1) = 3.1122;\ \log e^{\sigma^2} = 4.2065$$

$$a = -\sigma + 0.2331 + 0.1919\,(m + 4.3);\ \lambda_1 - \lambda = \frac{1}{2}.$$

Dabei habe ich gegen früher a etwas mehr abgeändert und $\log a = 9.8771 - 10$ angenommen. Darnach erstreckt sich der als sternleer angenommene Raum bis zur Parallaxe 0.″353. Mir scheint diese Annahme durchwegs akzeptabel. λ mußte entsprechend dem neuen Material wesentlich abgeändert und es mußte $\lambda = 0.655$ gewählt werden; dann ergeben sich die m. Parallaxen π_m aus folgender Tabelle:

m	$\log \pi_m$	π_m	π_k
2.0	8.682—10	0.″0482	0.″0530
4.0	8.422	0.0264	0.0265
6.0	8.133	0.0136	0.0132
8.0	7.813	0.0065	0.0069
10.0	7.464	0.0029	0.0033

Unter π_k sind die hypothetischen Parallaxen von Herrn Kapteyn angegeben, die ich schon früher meinen Rechnungen zu Grunde gelegt habe. Die Übereinstimmung muß als eine vollkommene angesehen werden. Inzwischen sind die π_k wiederholt abgeändert worden. Eine Verpflichtung, diese verschiedenen Varianten immer von neuem zu berücksichtigen und die ganze Rechnung dementsprechend abzuändern, kann ich nicht anerkennen, da die Sicherheit derselben, sicherlich nicht von Herrn Kapteyn selbst, wohl aber von andern, zweifellos überschätzt worden ist. Wenn Herr Sch. die Meinung zu vertreten scheint, daß mehr als 3 Stellen nach der Null in den Werten von π_m sicher sind und jede Abweichung der jeweilig neuesten Werte als unzulässig oder als nachgewiesener Mangel der Rech-

nung bezeichnet wird, so wird ihm wohl niemand zustimmen. Offenbar übersieht er es, daß die Werte π_m von gewissen Voraussetzungen abhängen, die immerhin als hypothetisch bezeichnet werden müssen. Das Verdienst der Bestimmung der mittleren Parallaxen durch Herrn Kapteyn kann hiedurch nicht geschmälert werden. Es wird vielmehr in Zweifel gezogen durch übertriebene und ganz unzutreffende Aussagen, wie sie Herr Sch. leider macht.

Bei dieser Gelegenheit möchte ich erwähnen, daß die von Herrn Kapteyn aufgestellte, sicherlich sehr brauchbare Formel für den Zusammenhang zwischen Parallaxe, Eigenbewegung und Helligkeit keineswegs mehr als eine Interpolation ist und deshalb nur einen beschränkten Gültigkeitsbereich besitzen kann. Seit mehr als 15 Jahren pflege ich in meinen Vorlesungen eine Ableitung zu geben, die diese übrigens wohl allgemein geteilte Ansicht klar hervortreten läßt.

Die Bemerkung, die schon Bessel zu seinen Parallaxenbeobachtungen von 61 Cygni veranlaßt hat, daß unter sonst gleichen Umständen eine um so größere Parallaxe eines Sterns zu erwarten ist, je größer seine scheinbare Eigenbewegung gefunden wird, kann in dieser Fassung keine tiefere Bedeutung haben; insbesondere ist sie nur für große E. B. einigermaßen einleuchtend. Nicht mehr, aber auch nicht weniger vage ist der weitere Ansatz, daß die Parallaxe proportional der scheinbaren E. B. zu setzen sei. Innerhalb gewisser Grenzen wird dieser Ansatz aber, wenn man die Mittelwerte für sehr viele Sterne nimmt, mit mehr oder weniger Sicherheit einen angenäherten Erfolg versprechen. Der Ansatz:

$$\pi = \gamma \cdot \mu,$$

wo μ die Eigenbewegung ist, ist also ein vermutetes Kriterium, das mit einer vorläufig unbestimmten Wahrscheinlichkeit aufgestellt werden kann. Ganz unabhängig davon ist ein anderer Ansatz. Wiederum unter sonst gleichen Umständen, d. h. unter der Annahme gleicher Leuchtkraft, wird ein Stern um so heller sein, je näher er uns ist, und zwar im quadratischen Verhältnis.

Für seine Helligkeit h_m, wo m die Sterngröße bedeutet, ist jetzt anzusetzen:

$$\pi = \Gamma \cdot \sqrt{h_m}.$$

Diese Formel wird ebenfalls mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit Erfolg versprechen. Offenbar wird sich nun eine neue Formel von größerer Brauchbarkeit ergeben, wenn man beide voneinander unabhängigen Formeln passend kombiniert, und zwar wird man die $\log \pi$ zu kombinieren haben, denn die Brauchbarkeit der zu erhaltenden Formel wird sich selbstverständlich zeigen in der Größe der in Prozenten ausgedrückten zu erwartenden Fehler. Die weitere Behandlung ist dann durch ein bekanntes und erprobtes Verfahren vorgeschrieben. Man wird empirisch durch Sterne, deren Eigenbewegung und Helligkeit bekannt sind, die beiden Annahmen durch Anbringung von noch zu bestimmenden Gewichten in einen Mittelwert vereinigen. Man erhält so:

$$\log \pi = c + \log \mu; \text{ Gewicht } p_2$$
$$\log \pi = \tfrac{1}{2} C + \tfrac{1}{2} \log h_m; \text{ Gewicht } p_1.$$

So ergibt sich:

$$\log \pi = \frac{1}{p_1 + p_2} \left\{ c p_2 + \tfrac{1}{2} C p_1 + p_2 \log \mu + \frac{p_1}{2} \log h_m \right\}$$
$$= \log M + \frac{p_2}{p_1 + p_2} \log \mu + \frac{p_1}{2(p_1 + p_2)} \log h_m.$$

Führt man Sterngrößen durch $\log \frac{h_m}{h_{5.5}} = -0.4\,(m - 5.5)$ ein und setzt:

$$a = 10^{-\frac{p_1}{5(p_1 + p_2)}}, \text{ d. h. } \frac{p_2}{p_1 + p_2} = 1 + 5 \log a,$$

so wird:

$$\pi = M \cdot a^{(m - 5.5)} \cdot \mu^{(1 + 5 \log a)}.$$

Also eine Formel mit den zwei zu bestimmenden Konstanten M und a. Die Formel des Herrn Kapteyn hat genau dieselbe Gestalt, nur hat sie drei Konstante, indem der Exponent von μ unabhängig von a ist. Bemerkenswert ist aber,

daß auch hier die vorgeschriebene Verbindung zwischen den beiden Exponenten nahe genug erfüllt wird. Für Sterne aller Typen findet er z. B.:

$$\pi = (0.905)^{m-5.5} \cdot (0.0387\,\mu)^{\frac{1}{1.405}}.$$

Nun ist nach der obigen Formel $1 + 5 \log a = \frac{1}{1.405}$, d. h. $a = 0.876$, während nach Herrn Kapteyn $a = 0.905$ ist. Man überzeugt sich leicht, daß die Differenz in den beiden Werten von a praktisch nicht in Frage kommen kann. Es ergibt sich noch, daß $\frac{p_1}{p_2}$ nahe $\frac{2}{5}$, daß also das Kriterium der Eigenbewegung $2^1/_2$ mal so sicher ist, wie das der Helligkeit.

Ganz neuerlich hat Herr Hertzsprung[1]) ebenfalls darauf aufmerksam gemacht, daß eine nur 2 Konstante enthaltende Formel vollkommen genügt. Das deckt sich also mit meiner obigen, vor vielen Jahren gemachten Darstellung der Sachlage.

6.

Ich habe schon oben ausgesprochen, daß die Darstellung der neuen Werte A_m in einer Weise zu behandeln, die als irgendwie definitiv angesehen werden könnte, unmöglich ist. Da es aber, wie erwähnt, immerhin von Wichtigkeit ist, die Durchführbarkeit der Rechnungen in concreto zu zeigen, werde ich dieselben so weit führen, als es wünschenswert ist. Die Anpassung an die Beobachtungen soll deshalb keineswegs so weit geführt werden, als vielleicht möglich wäre. Auch die Genauigkeit der Rechnung an sich wurde etwas eingeschränkt, was die Sicherheit der Resultate für die schwachen Sterne, etwa von der 14. Größe ab, etwas herabgemindert hat. Indessen sind die Resultate immerhin sicherer wie die früher gefundenen und in prinzipieller Richtung bedeuten sie wohl einen Fortschritt. Was die früheren Resultate betrifft, so erlaube ich mir zu wiederholen, was ich am Schlusse der genannten Rechnungen sagte (IV, S. 488):

[1]) Astr. Nachr., Nr. 4975.

„Mir fällt es nicht ein, dem Resultat der angestellten Rechnung besondere Zuverlässigkeit zuzusprechen. Aber es ist doch nicht ganz ohne Wert, weil es auf genau präzisierten Annahmen aufgebaut ist. Die Zulässigkeit derselben ist durch die Übereinstimmung mit den gegenwärtig verfügbaren Daten bewiesen, aber es tut dringend not, diese Daten zu vermehren....“ Dann werden die verbesserungsfähigen Elemente und diejenigen, die nur der Einfachheit wegen für alle Zonen als unveränderlich angesehen werden, im einzelnen erwähnt. Mit diesem Zitat beabsichtige ich festzustellen, daß ich die Sicherheit der gewonnenen Resultate nichts weniger als überschätzt habe. Deshalb ist die Kritik des Herrn Schouten als gänzlich überflüssig zu bezeichnen, während ich das Gewand, in dem diese Kritik erscheint, mit den gebührenden Worten zu kennzeichnen unterlassen möchte.

Die Formeln, nach denen die weiteren Rechnungen ausgeführt wurden, sind bis auf Umstellungen und geringfügige Änderungen dieselben, welche ich in IV zusammengestellt habe. Die räumliche Dichtigkeit der Sternverteilung $D(\varrho)$ in der Entfernung ϱ ist nach wie vor:

$$D(\varrho) = \gamma\,[\varrho^{-\lambda} - a\,\varrho^{-\lambda_1}].$$

In der Verteilungsfunktion $\varphi(i)$ habe ich das zweite Glied, entsprechend den Betrachtungen des Artikels (2), fortgelassen, also gesetzt:

$$\varphi(i) = \Gamma_1 \left\{ e^{-h^2\left(\log\frac{i}{H}\right)^2 + b\,\log\frac{i}{H}} \right\},$$

wobei natürliche Logarithmen gemeint sind. Die weiteren Bezeichnungen waren:

$$\sigma(\mu) = \frac{2\,b\,h^2 - (\mu+1)}{4\,k}; \quad a = -\sigma - k\log\frac{h_m r_0^2}{H}; \quad r_0^{\lambda_1-\lambda} = a;$$

$$\beta = a\,\frac{3-\lambda}{3-\lambda_1}$$

$$\Phi(\mu) = e^{\sigma^2(\mu)} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\sigma(\mu)}^{\sigma(\mu)} e^{-r^2}\,dr; \quad \chi(\mu) = e^{\sigma^2(\mu)} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\sigma(\mu)+k\log\frac{h_m}{h_\mu}}^{\sigma(\mu)} e^{-r^2}\,dr$$

$$\mathfrak{A}_m = \frac{1}{3-\lambda}\left(\frac{H}{h_m}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}}\left\{\Phi(4-\lambda) - \beta\left(\frac{h_m}{H}\right)^{\frac{\lambda_1-\lambda}{2}}\Phi(4-\lambda_1)\right.$$
$$\left. - \left(\frac{h_m r_0^2}{H}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}}\Phi(1)\,(1-\beta r_0^{\lambda-\lambda_1})\right\}$$

$$C_1 = \frac{1}{3-\lambda}\left(\frac{H}{h_m}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}}\left\{\chi(4-\lambda) - \beta\chi(4-\lambda_1)\right.$$
$$\left. - \left(\frac{h_m}{h_n}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}}\chi(1)\left[1-\beta\left(\frac{h_n}{H}\right)^{\frac{\lambda_1-\lambda}{2}}\right].\right\}$$

Dann ist:

$$\frac{1}{\omega}A_m = \frac{\gamma\sqrt{\pi}\,\Gamma_1}{2k}H\mathfrak{A}_m \quad \ldots \quad m<n$$

$$\frac{1}{\omega}A_m = \frac{\gamma\sqrt{\pi}\,\Gamma_1}{2k}H(\mathfrak{A}_m - C_1) \quad m>n.$$

Vielleicht sind die etwas umgestellten Formeln übersichtlicher:

$$\frac{\gamma\sqrt{\pi}}{2k}\cdot\frac{\Gamma_1 H}{3-\lambda} = \Gamma$$

$$\mathfrak{A}_m = \left(\frac{H}{h_m}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}}\left\{\left[\Phi(4-\lambda) - \left(\frac{h_m r_0^2}{H}\right)^{\frac{3-\lambda_1}{2}}\Phi(1)\right]\right.$$
$$\left. - \beta\left(\frac{h_m}{H}\right)^{\frac{\lambda_1-\lambda}{2}}\left[\Phi(4-\lambda_1) - \left(\frac{h_m r_0^2}{H}\right)^{\frac{3-\lambda_1}{2}}\Phi(1)\right]\right\}$$

$$C_1 = \frac{1}{3-\lambda}\left(\frac{H}{h_m}\right)^{\frac{3-\lambda}{2}}\left\{\left[\chi(4-\lambda) - \left(\frac{h_m}{h_n}\right)^{\frac{3-\lambda_1}{2}}\chi(1)\right]\right.$$
$$\left. - \beta\left(\frac{h_m}{H}\right)^{\frac{\lambda_1-\lambda}{2}}\left[\chi(4-\lambda_1) - \left(\frac{h_m}{h_n}\right)^{\frac{3-\lambda_1}{2}}\chi(1)\right]\right\}.$$

Für die numerische Rechnung sind die von Radau gegebenen ausführlichen Tafeln für das Integral:

$$\psi(z) = e^{z^2}\int_{z^2}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$$

von Wert, da man

$$J = e^{\sigma^2} \int_{\sigma - \Delta}^{\sigma} e^{-x^2} dx$$

braucht, wo σ mehrere Einheiten und Δ klein ist. Denn es ist:

$$J = e^{\sigma^2 - (\sigma - 1)^2} \cdot \psi(\sigma - \Delta) - \psi(\sigma).$$

Noch eine Bemerkung möchte ich hinzufügen, von der ich Gebrauch gemacht habe. Will man a in a_1 verändern, so muß auch r_0 in r_1 geändert werden, weil r_0 zwischen Rechnungen nach der Gleichung $r_0^{\lambda_1 - \lambda} = a^2$ gewählt wurde. Es kommt aber r_0 nur in der Verbindung $h_m r_0^2$ vor. Man hat also die Klammer in A_m zu berechnen für m und r_1^2, d. h. mit $h_m r_1^2$. Bestimmt man nun eine Größe m_1, so daß $h_{m_1} r_0^2 = h_m r_1^2$, so kann man auch die Klammer für die Größe m_1 und für r_0 berechnen, was durch Interpolation leichter geschieht, als durch eine neue Rechnung, wenn auch noch $\beta_1 h_m^{\frac{\lambda_1 - \lambda}{2}} = \beta h_{m_1}^{\frac{\lambda_1 - \lambda}{2}}$ gemacht wird. Man hat also zur Bestimmung von m_1

$$\frac{h_{m_1}}{h_m} = \frac{r_1^2}{r_0^2} = \left(\frac{\beta_1}{\beta}\right)^{\frac{2}{\lambda_1 - \lambda}}$$

und dann ist in der Tat:

$$\beta_1 h_m^{\frac{\lambda_1 - \lambda}{2}} = \beta_1 h_m^{\frac{\lambda - \lambda}{2}} \left(\frac{\beta}{\beta_1}\right) = \beta h_{m_1}^{\frac{\lambda_1 - \lambda}{2}}$$

für $\lambda_1 - \lambda = \frac{1}{2}$ ist:

$$\frac{h_{m_1}}{h_m} = \left(\frac{\beta_1}{\beta}\right)^4, \text{ d. h.: } m_1 - m = -10 \log \frac{\beta_1}{\beta}.$$

Die passende Wahl von λ für jede Zone wird durch die beifolgende Tabelle für $\mathfrak{A}_m$ erleichtert.

Zuerst sollen die A_m für alle Sterne, also im „schematischen Sternsystem", durch die angeführten Formeln dargestellt werden. Hier wie im folgenden wurden die Zahlen zu Grunde gelegt, welche bei der Berechnung der mittleren Par-

$\log \mathfrak{A}_m$

$m \backslash \lambda$	0.515	0.535	0.555	0.575	0.595	0.615	0.635	0.655	0.675	0.695	0.715	0.735	0.755	0.775	0.795	m. Diff.	
2.0	2.509	2.495	2.481	2.467	2.454	2.441	2.428	2.415	2.403	2.390	2.377	2.364	2.351	2.338	2.326	0.013	2.0
3.0	3.073	3.056	3.039	3.022	3.005	2.989	2.973	2.957	2.940	2.924	2.909	2.893	2.878	2.863	2.848	0.016	3.0
4.0	3.622	3.601	3.581	3.562	3.542	3.523	3.504	3.485	3.466	3.447	3.428	3.409	3.390	3.372	3.355	0.019	4.0
5.0	4.158	4.134	4.110	4.088	4.066	4.043	4.020	3.997	3.974	3.952	3.931	3.909	3.888	3.867	3.847	0.022	5.0
6.0	4.685	4.658	4.631	4.605	4.579	4.553	4.527	4.501	4.475	4.450	4.425	4.400	4.375	4.351	4.327	0.026	6.0
7.0	5.205	5.175	5.145	5.115	5.085	5.056	5.027	4.998	4.969	4.940	4.911	4.882	4.853	4.825	4.798	0.029	7.0
8.0	5.720	5.686	5.653	5.620	5.586	5.553	5.520	5.488	5.456	5.424	5.391	5.358	5.326	5.294	5.263	0.033	8.0
9.0	6.231	6.193	6.156	6.119	6.082	6.045	6.008	5.972	5.935	5.899	5.863	5.828	5.793	5.758	5.723	0.036	9.0
10.0	6.739	6.696	6.655	6.614	6.574	6.534	6.494	6.454	6.414	6.374	6.335	6.296	6.257	6.217	6.178	0.040	10.0
11.0	7.244	7.197	7.151	7.107	7.063	7.019	6.975	6.932	6.888	6.845	6.802	6.759	6.716	6.673	6.631	0.043	11.0
12.0	7.748	7.699	7.650	7.601	7.552	7.503	7.455	7.408	7.361	7.314	7.267	7.220	7.173	7.126	7.080	0.047	12.0
13.0	8.250	8.197	8.144	8.091	8.039	7.987	7.935	7.883	7.831	7.780	7.730	7.679	7.629	7.579	7.528	0.051	13.0
14.0	8.751	8.690	8.637	8.580	8.523	8.466	8.409	8.353	8.298	8.244	8.190	8.136	8.082	8.028	7.975	0.056	14.0
15.0	9.251	9.190	9.129	9.068	9.008	8.948	8.888	8.829	8.770	8.711	8.652	8.594	8.536	8.478	8.420	0.059	15.0
16.0	9.751	9.685	9.620	9.556	9.492	9.428	9.364	9.301	9.238	9.175	9.112	9.050	8.988	8.926	8.864	0.063	16.0

allaxen benutzt worden sind. λ muß natürlich den Zahlen A_m der betreffenden Zone angepaßt werden. Ich habe stets die Betrachtungen über das schematische Sternsystem nur als einen orientierenden Versuch aufgefaßt, der hauptsächlich darum einen gewissen Wert hat, weil hier die Zahlen A_m selbstverständlich zuverlässiger sind als für die einzelnen Zonen. Es ist mir nicht erfindlich, wie das Gegenteil von Seite einer unmotivierten Kritik behauptet werden konnte. Nach einigen leichten Versuchen bin ich beim Wert $\lambda = 0.655$ stehen geblieben, der auch selbstverständlich bei der Berechnung der m. Parallaxen benutzt wurde. Für die Konstante

$$\Gamma = \log \frac{\omega \gamma \sqrt{\pi}}{2k} \Gamma_1 H$$

ergab sich — 5.444. Gemäß dem Verlauf der Zahlen $\log A_m$ wurde $n = 9.5$ gesetzt. Die folgende Tabelle gibt Aufschluß über die erhaltenen Resultate. Unter Sch. sind die beobachteten $\log A_m$ angegeben. Sie wurden für $m > 9.5$, wie schon oben als plausibel erkannt, um + 0.037 korrigiert. Das ist natürlich eine wenig sichere Korrektur, aber unter den jetzigen Umständen gewiß zulässig. Will man sie nicht als legal gelten lassen, so würden geringfügige Änderungen genügen, um die Darstellung wiederum genügend zu gestalten. Aus den aus der Zusammenstellung ersichtlichen übrig bleibenden Differenzen dürfte hervorgehen, daß der Anschluß an die Beobachtungsdaten ein vollkommener ist.

Da von der Extinktion abgesehen wurde, ist die Grenze des Sternsystems gegeben durch:

$$r_1 = \sqrt{\frac{H}{h_n}},$$

also $\log r_1 = 2.76$; $r_1 = 580$ Siriusweiten.

m	$\log \mathfrak{A}_m$	$\log C_1$	$\log (\mathfrak{A}_m - C_1)$	$\log A_m$	Sch.	Δ
2.0	2.415			— 3.029	— 3.020	+ 9
3.0	2.957			— 2.487	— 2.492	— 5
4.0	3.485			— 1.959	— 1.967	— 8
5.0	3.997			— 1.447	— 1.450	— 3
6.0	4.502			— 0.942	— 0.941	+ 1
7.0	4.998			— 0.446	— 0.440	+ 6
8.0	5.488			+ 0.044	+ 0.049	+ 5
9.0	5.972			+ 0.528	+ 0.528	0
9.5	6.213			+ 0.769	+ 0.764	— 5
10.0	6.454	4.712	6.446	+ 1.002	+ 1.001	— 1
10.5	6.693	5.493	6.665	+ 1.221	+ 1.221	0
11.5	7.170	6.463	7.076	+ 1.632	+ 1.638	+ 6
12.5	7.646	7.185	7.461	+ 2.017	+ 2.020	+ 3
13.5	8.118	7.814	7.820	+ 2.376	+ 2.375	— 1
14.5	8.591	8.391	8.158	+ 2.714	+ 2.702	— 12
15.5	9.065	8.935	8.478	+ 3.034	+ 3.017	— 17

Die Formel (VI) des Artikels 2 ergibt folgendes: Dort ist die Bezeichnung so gewählt, daß, um Übereinstimmung mit der zuletzt benutzten zu erzielen, man in (III) $\Gamma_1 \cdot \varphi(H)$ statt $\varphi(H)$ und $\gamma \cdot \Delta(r_1)$ statt $\Delta(r_1)$ zu setzen hat. Sie lautet deshalb:

$$\Delta\left(\frac{d^2 \log A_n}{dn^2}\right) = \frac{0.02}{\varepsilon A_n} \cdot \frac{\omega \sqrt{\pi}}{2k} \Gamma_1 \gamma H r_1^{3-\lambda} \left(1 - \frac{d}{\sqrt{r_1}}\right) \text{ oder}$$

$$r_1^{2,345} \left(1 - \frac{a}{\sqrt{r_1}}\right) = [7.565]\, \Delta\left(\frac{d^2 \log A_n}{dn^2}\right),$$

weil $\log A_n = 0.764$ ist. Nimmt man der Reihe nach für $\Delta\left(\frac{d^2 \log A_n}{dh_n^2}\right)$: 0.068, 0.048, 0.028, so findet sich:

$$\log r_1 = 2.78;\ 2.66;\ 2.56. \quad r_1 = 600;\ 460;\ 360.$$

Diese Werte werden vielleicht, wie die oben gemachten Bemerkungen erweisen, den wahrscheinlichen Wert von r_1 umfassen. Genaueres läßt sich zur Zeit nicht aussagen, so lange die bemerkten Inhomogenitäten in den Werten von A_m nicht behoben sind. Zunächst ist wohl noch der aus H und h_n bestimmte Wert von r_1 als der sicherere anzusehen. Die aus (VI) bestimmten sind vollkommen unabhängig von den sonstigen Rechnungen und deshalb sicherlich wertvoll. Sie stimmen

doch immerhin mit dem ersteren (580 Siriusweiten) recht gut überein, wenn die ganze Sachlage vernünftig beurteilt wird. Danach wäre die Ausdehnung des schematischen Systems mit etwa *500 Siriusweiten* anzunehmen. Die Verkleinerung gegen die in (IV) gegebenen Dimensionen war vorauszusehen, weil die Zahl der Herschelschen Sterne in der Milchstraße viel größer angenommen wurde, als das neue Material anzeigt. Von einer Extinktion ist dabei abgesehen worden. Die Gesamtzahl aller sichtbaren Sterne ist:

$$A = \omega \int_0^{r_2} A(\varrho)\, \varrho^2\, d\varrho = \omega\gamma \int_0^{r_2} (\varrho^{2-\lambda} - a\,\varrho^{2-\lambda-1/2})\, d\varrho,$$

da man bei solchem Überschlag $r_0 = 0$ setzen darf. Man findet: $HI_1 = [4.592 - 10]$, $\omega\gamma = [9.335 - 10]$, wobei ω die Fläche eines Quadratgrades ist. Es ist also noch mit der Anzahl Quadratgrade [4.615] zu multiplizieren, welche die ganze Kugelfläche enthält, also zu setzen: $\log \omega\gamma = 3.950$.

Man erhält so:

für $r_2 =$	600	$\log A =$ 10.090
	460	9.824
	360	9.524

also A etwa 10 Milliarden. In A. N. Nr. 4992 schätzt Herr Hertzsprung durch eine weitgehende Interpolation $\log A = 9.850$, was damit gut übereinstimmt.

Bekanntlich hat Schwarzschild A. N. Nr. 4557 ein unendliches Sternsystem behandelt, was nach meiner Meinung allerdings nicht angängig ist. Aus seinen Zahlen folgt denn auch ein ganz anderes und zwar enorm viel größeres A. In andern Einheiten (Einheit der Entfernung entspricht der Parallaxe 1".0) gibt er für die Anzahl der Sterne in der Kubikeinheit:

$$\log \text{nat}\, D(r) = 1.124 + 0.485 \log \text{nat}\, r - 0.0956\, (\log \text{nat}\, r)^2.$$

Die Formel: $$A = 4\pi \int_0^{\infty} D(r)\, r^2\, dr$$

schreibt sich dann, wenn die 3 Koeffizienten in der Formel für $D(r)$ der Reihe nach mit a, b, c bezeichnet werden:

$$A = \frac{4\pi}{\sqrt{c}} e^{a + \frac{(b+3)^2}{4c}} \int_{-\infty}^{+x} e^{-y^2} dy$$

und es erreicht A den enormen Wert $\log A = 16.14$. Schließlich sollen die von Schwarzschild gefundenen Werte (Schw.) für die räumliche Dichtigkeit $D(r)$ und die von mir hier angegebenen (S) verglichen werden. Es wurde gefunden $\gamma\,\omega = [9.335 - 10]$. In Einheiten des Radius ist 1 Quadratgrad $\omega = (1 : 57.3)^2$, also $\gamma = [2.851]$. Die räumliche Dichtigkeit, d. h. die Anzahl der Sterne in einer Kubik-Siriusweite in der Entfernung von σ Siriusweiten ist demnach:

$$\log S = \log D = 2.851 - 0.655 \log \sigma + \log\left(1 - \frac{0.754}{\sqrt{\sigma}}\right).$$

Nach Schwarzschilds Rechnungen ist die Dichtigkeit:

$$\log D_1(r) = + 0.488 + 0.485 \log r - 0.2200 (\log r)^2,$$

oder, da $r = 5 \cdot \sigma$ zu setzen ist:

$$\log D_1(\sigma) = 0.719 + 0.177 \log \sigma - 0.2200 (\log \sigma)^2.$$

Um schließlich die Anzahl der Sterne in einer Kubik-Siriusweite zu erhalten, muß man mit $5^3 = 125$ multiplizieren:

$$\log \text{Schw} = \log D_1(\sigma) = 2.816 + 0.177 \log \sigma - 0.2200 (\log \sigma)^2.$$

Die Gegenüberstellung gibt folgende Tabelle:

σ	log Schw	log S	diff.	Δ_1	σ	log Schw	log S	diff.	Δ_1
0.10	2.419				100	2.290	1.507	+ 0.783	— 0.10
0.25	2.630				200	2.058	1.320	738	— 6
0.50	2.740				300	1.904	1.210	694	— 1
0.564	2.759				400	1.788	1.130	658	+ 2
1.0	2.816	2.243	+ 0.573	+ 0.11	500	1.691	1.068	623	+ 6
2.0	2.848	2.324	524	+ 16	600	1.610	1.017	593	+ 9
3.0	2.850	2.291	559	+ 12	700	1.539	0.975	564	+ 12
4.0	2.843	2.251	592	+ 9	800	1.476	0.937	539	+ 14
5.0	2.831	2.215	616	+ 6	900	1.419	0.907	512	+ 17
10	2.773	2.078	695	— 2	1000	1.367	0.876	491	+ 19
20	2.674	1.920	754	— 7					
30	2.596	1.821	775	— 10					
40	2.535	1.747	788	— 11					
50	2.481	1.689	792	— 11					
100	2.290	1.507	783	— 10					

Nimmt man als ungefähres Mittel der Differenz 0.680, so bleibt A_1 übrig. Bis $\sigma = 800$ ist demnach der Verlauf, abgesehen von einer Konstanten, bei beiden Bestimmungen angenähert derselbe (bis etwa auf 25%), abgesehen von ganz kleinen σ. Weiterhin tritt auch jetzt, wie früher, die Tatsache hervor, daß die gefundenen D_1, wenn man von kleinen σ (etwa $\sigma < 5$) absieht, sehr nahe verlaufen wie $\sigma^{-\lambda}$. Hier ist $\lambda = 0.60$, also wie schon in (III) bemerkt wurde, von dem Werte, welchen die log A_m ($\lambda = 0.655$) ergeben, etwas verschieden.

σ	log $\sigma^{-0.60}$	log S	diff.	σ	log $\sigma^{-0.60}$	log S	diff.
1	0.000	2.243	2.243	50	— 1.019	1.689	2.708
2	— 0.181	2.324	2.515	100	— 1.200	1.507	2.707
3	— 0.286	2 291	2.577	200	— 1.381	1.320	2.701
4	— 0.362	2.251	2.613	300	— 1.486	1.210	2.696
5	— 0.419	2.215	2.634	400	— 1.562	1.130	2.692
10	— 0.600	2.078	2.678	500	— 1.619	1.068	2.687
20	— 0.781	1.920	2.701	600	— 1.667	1.017	2.684
30	— 0.886	1.821	2.707	700	— 1.707	0.975	2.682
40	— 0.962	1.747	2.709	800	— 1.742	0.937	2.679
50	— 1.019	1.689	2.708	900	— 1.772	0.907	2.679
				1000	— 1.800	0.876	2.676

Wäre $D = \gamma\, \sigma^{-\lambda}$, so wären die m. Parallaxen $\pi_m = \Gamma \cdot h_m^{1/2}$. Die empirischen Parallaxenwerte werden also in der Hauptsache von einer Veränderung der Dichtigkeitsverteilung ganz in der Nähe der Sonne hervorgebracht. Alle diese Sätze habe ich bereits in den Arbeiten III und IV aufgestellt. An den Mißverständnissen, die daran geknüpft worden sind, mag die Überschätzung der Sicherheit der Zahlenresultate schuld sein, welche auf anderem Wege erlangt worden sind und die keineswegs die ihnen zugeschriebene Allgemeingültigkeit beanspruchen können.

Die Rechnungen in Bezug auf die Michstraßenzone V ergaben folgende Resultate:

$$\lambda = 0.535; \quad n = 10.0 \quad \log \Gamma = -5.428.$$

m	$\log \mathfrak{A}_m$	$\log C_1$	$\log (\mathfrak{A}_m - C_1)$	$\log A_m$	Sch	Δ
2.0	2.495			— 2.933	— 2.900	+ 33
3.0	3.056			— 2.372	— 2.365	+ 7
4.0	3.601			— 1.827	— 1.829	— 2
5.0	4.134			— 1.294	— 1.298	— 4
6.0	4.658			— 0.770	— 0.773	— 3
7.0	5.175			— 0.253	— 0.253	0
8.0	5.686			+ 0.258	+ 0.258	0
9.0	6.193			+ 0.765	+ 0.765	0
10.0	6.696			+ 1.268	+ 1.266	— 2
10.5	6.947	5.303	6.937	+ 1.509	+ 1.501	— 8
11.0	7.197	6.082	7.162	+ 1.734	+ 1.727	— 7
12.0	7.699	7.059	7.586	+ 2.158	+ 2.158	0
13.0	8.197	7.795	7.978	+ 2.550	+ 2.551	+ 1
14.0	8.694	7.436	8.345	+ 2.917	+ 2.918	+ 1
15.0	9.190	8.026	8.688	+ 3.260	+ 3.265	+ 5
16.0	9.685	8.565	8.998	+ 3.570	+ 2.593	+ 23

Ich habe hier die Werte $m > 10.0$ um + 0.037 korrigiert. Diese Korrektion ist, wie gesagt, zweifelhaft, ändert aber wiederum nichts an der Tatsache, daß dadurch die Möglichkeit einer fast vollkommenen Darstellung der Beobachtungsdaten nicht alteriert werden kann. Die Gesamtzahl $A_{2.0}$ ist hier 9.0, demnach wäre hier eine viel größere Abweichung, als oben gefunden, vollkommen gleichgültig.

Für die Zone D wurde gefunden:

$$\lambda = 0.675; \quad n = 9.5; \quad \log \Gamma = - 5.377.$$

m	$\log \mathfrak{A}_m$	$\log (\mathfrak{A}_m - C_1)$	$\log A_m$	Sch	Δ
2.0	2.403		— 2.974	— 2.942	+ 32
3.0	2.940		— 2.437	— 2.424	+ 13
4.0	3.464		— 1.913	— 1.911	+ 2
5.0	3.974		— 1.403	— 1.403	0
6.0	4.475		— 0.902	— 0.903	— 1
7.0	4.969		— 0.408	— 0.407	+ 1
8.0	5.456		+ 0.079	+ 0.080	+ 1
9.0	5.935		+ 0.558	+ 0.558	0
9.5	6.175		+ 0.798	+ 0.794	— 4
10.0	6.414	6.406	+ 1.029	+ 1.025	— 4
10.5	6.651	6.624	+ 1.247	+ 1.245	— 2
11.5	7.125	7.032	+ 1.655	+ 1.665	+ 10
12.5	7.596	7.416	+ 2.039	+ 2.048	+ 9
13.5	8.064	7.775	+ 2.398	+ 2.402	+ 4
14.5	8.534	8.111	+ 2.734	+ 2.728	— 6
15.5	9.004	8.428	+ 3.051	+ 3.042	— 9

Die Korrektion für $m > 9.5$ wurde zu $+ 0.030$ angenommen. Die Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung ist fast vollkommen.

Für die Zone C wurde angenommen:

$$\lambda = 0.715; \quad n = 8.5; \quad \log l' = - 5.449$$

und die Korrektion für $m \geq 9.5$ zu $+ 0.020$ bzw. $+ 0.016$. Die letztere zeigt, wie durch kleine Veränderungen der Ausgleich der Differenzen erzielt werden kann, nämlich:

m	$\log A$	I	II
8.0	$- 0.060$		
8.5	$+ 0.173$	$+ 233$	$- 4$
9.0	$+ 0.402$	$+ 229$	$- 9$
9.5	$+ 0.622$	$+ 220$	$- 10$
10.0	$+ 0.834$	$+ 212$	$- 5$
10.5	$+ 1.041$	$+ 207$	$- 7$
11.0	$+ 1.241$	$+ 200$	

m	$\log \mathfrak{A}_m$	$\log (\mathfrak{A}_m - C_1)$	$\log A_m$	Sch	I
2.0	2.377		3.072	$- 3.054$	$+ 18$
3.0	2.909		$- 2.540$	$- 2.535$	$+ 5$
4.0	3.428		2.021	$- 2.023$	$- 2$
5.0	3.931		$- 1.518$	$- 1.517$	$+ 1$
6.0	4.425		$- 1.024$	$- 1.022$	$+ 2$
7.0	4.911		$- 0.538$	$- 0.535$	$+ 3$
8.0	5.391		$- 0.058$	$- 0.060$	$- 2$
8.5	5.627		$+ 0.178$	$+ 0.173$	$- 5$
9.0	5.863	5.856	$+ 0.407$	$+ 0.402$	$- 5$
9.5	6.099	6.073	$+ 0.624$	$+ 0.622$	$- 2$
10.5	6.568	6.482	$+ 1.033$	1.041	$+ 8$
11.5	7.040	6.842	$+ 1.415$	1.432	$+ 17$
12.5	7.499	7.223	$+ 1.774$	1.786	$+ 12$
13.5	7.961	7.559	$+ 2.110$	2.111	$+ 1$
14.5	8.422	7.887	$+ 2.421$	2.403	$- 18$

Auch diese Darstellung ist jedenfalls genügend.

Schließlich seien noch die Resultate einiger Rechnungen über die Sternverteilung in der Zone A, welche die Pole der Milchstraße enthalten, mitgeteilt. Ich habe mich hiebei nur auf mehr überschlagsweise ausgeführte Darstellungen beschränkt,

da hier die Unsicherheit des Materials teils infolge der geringen Anzahl der helleren Sterne, teils wohl auch durch andere Umstände viel erheblicher geworden ist, so daß eine Bestimmung der betreffenden Konstanten zurzeit nur mit großer Ungenauigkeit auszuführen möglich scheint.

Mit der Konstanten -5.369 und $\lambda = 0.775$ ergaben sich $\log A_m = f_1$ und die übrig bleibenden Fehler Δ_1.

m	f_1	Sch	Δ_1	f_2	Δ_2
2	-3.030	-3.278	$+248$	—	—
4	-1.995	-2.159	$+164$	-2.111	$+48$
6	-1.019	-1.099	$+80$	-1.076	$+23$
8	-0.111	-0.128	$+17$	-0.127	$+1$
10	$+0.708$	$+0.709$	-1	$+0.700$	-9
11	$+1.048$	$+1.079$	-31	—	—
12	$+1.381$	$+1.407$	-26	$+1.377$	-30
13	$+1.689$	$+1.691$	-2	$+1.689$	-2
14	$+1.984$	$+1.941$	$+43$	$+1.986$	$+45$

Die großen Abweichungen für $m = 2$ und $m = 4$ sind an sich ganz gleichgültig, weil die Anzahl aller Sterne 1 bzw. 17 ist, während die f_1 hiefür 2 und 14 ergeben. Für $m = 6$ freilich kann die Differenz (239 gegen 194) immerhin als nicht recht zulässig betrachtet werden. Man wird voraussichtlich die Anzahlen der schwachen Sterne durch andere Wahl der Konstanten besser darstellen können, aber die Unsicherheit dürfte wenig verringert erscheinen. Was die hellen Sterne betrifft, so hat man es in der Hand, die berechneten Werte den beobachteten, die übrigens offenbar durch weitgehende und unsichere Interpolation zustande gekommen scheinen, näher zu bringen und zwar durch das oben S. 130 angegebene Mittel. Es steht doch an sich fest, daß die Konstanten α und $\lambda_1 - \lambda$ wesentlich durch die m. Parallaxen bestimmt werden und die Wahrscheinlichkeit, in allen Zonen mit denselben Konstanten α und $\lambda_1 - \lambda$ auszukommen, sehr gering sein muß. Wie man aber für die hellen Sterne $m = 2, 3, 4, 5$ zu irgend welchen sicheren Parallaxen kommen will, ist nicht recht verständlich, da die Zahlen aller Sterne der Reihe nach nur 1, 5,

17, 60 sind. Auf diesem Wege ist also eine Bestimmung namentlich von a kaum zu erwarten. Nimmt man für a den Wert $a' = 1.585\,a$, ändert im Übrigen nichts, so ergeben sich die Zahlen f_2 und Δ_2. Die Darstellung ist also jetzt für die hellen Sterne ganz genügend geworden, während sich für die schwachen die Sachlage nicht merklich geändert hat. Der sternleere Raum wird allerdings sich bis zur Parallaxe 0.″14 vergrößern, was vielleicht beanstandet werden kann, wenn auch kaum ein begründeter Einwand dagegen erhoben werden könnte. In jedem Falle muß eine Revision der A_m für die Zone A abgewartet werden, ehe man an weitere Rechnungen mit Erfolg wird schreiten können.

Wenn man die gewonnenen vorläufigen Resultate zusammenstellt, so ergibt sich:

Zone	I'	λ	n	Grenzen in Siriusweiten	
alle Sterne	— 5.444	0.655	9.5	587	(IV)
V	— 5.428	0.535	10.0	725	1700
IV	— 5.377	0.675	9.5	580	645
III	— 5.449	0.715	8.5	360	457
I	— 5.339	0.775	7.0	180	327

Die nicht gleichmäßig verlaufende Wertreihe I' deutet von Neuem auf Ungleichheiten des benutzten Materials und sicher auch auf die nicht genügend weit geführten Näherungsrechnungen hin. Ein Vergleich mit den in IV gefundenen Zahlen zeigt eine besonders bedeutende Abweichung in der Milchstraße, während in den andern Zonen eine größere Übereinstimmung nicht zu erwarten war, denn die Resultate sind sehr empfindlich gegen Änderungen in den Zahlen A_m, wie ich schon sehr oft hervorgehoben habe. In der Milchstraße spricht sich die Verschiedenheit des neuen Materials und der Resultate der Herschelschen Eichungen deutlich aus. Keinem Zweifel unterliegt, daß das Sternsystem in der Milchstraße an vielen Stellen eine viel bedeutendere Ausdehnung besitzen muß, als die neue Rechnung ergibt, da hier infolge des sehr stark mit dem Ort variierenden Sternreichtums das „typische Sternsystem“ nur

ganz unsicher definiert werden kann. Es müßten jedenfalls an viel mehr Stellen Abzählungen ausgeführt werden, als bisher geschehen ist.

Zunächst kann man in Anbetracht aller Umstände immerhin behaupten, daß bisher mindestens eine ungefähre Vorstellung von der Ausdehnung des Sternsystems gewonnen ist. Es wäre eine Verkennung der ganzen Sachlage, wenn man schon jetzt mehr verlangen wollte.

Die weitere Entwicklung des großen Problems der Stellarastronomie, so weit wir auch von einer ganz befriedigenden Lösung entfernt sein mögen, ist doch immerhin auf einen einigermaßen festen Grund gestellt worden. Erwünscht bleibt auch weiterhin eine Ausfeilung und Verbesserung der Abzählungsresultate, auch weitere Untersuchungen über mittlere Parallaxen. Was den ersten Punkt betrifft, so sind die Abzählungen auf noch schwächere Sterne auszudehnen, insbesondere ist aber eine möglichst scharfe Bestimmung der Zahlen A''' in der Nähe von $m = 8$ bis $10^1/_2$ erforderlich, wie die allgemeinen Untersuchungen in Artikel (3) beweisen. Gerade in dieser Beziehung läßt offenbar das neue Material noch zu wünschen.

Noch muß folgendes bemerkt werden: Aus den Integralgleichungen können prinzipiell sowohl die scheinbare Dichtigkeitsverteilung A, als auch die wahre D, d. h. diejenige, wie sie nach Berücksichtigung der Extinktion stattfindet, gefunden werden. Bei der Unvollständigkeit der verfügbaren Daten wurde in den mitgeteilten Rechnungen von jeder Extinktion abgesehen. Damit aber die so berechneten mittleren Parallaxen mit der nach den richtigen Formeln berechneten genügend übereinstimmen, darf der durchschnittliche Einfluß der Extinktion ein gewisses Maß nicht übersteigen. Daß die Extinktion an sich voraussichtlich gering sein wird, habe ich schon in III wahrscheinlich gemacht. Es ist von Interesse, den Zusammenhang der ohne Extinktion berechneten π mit den nach den strengen Formeln berechneten π_1 zu überschlagen.

Es ist:

$$\frac{\pi_1}{0''2}\int A(\varrho)\,\varrho^4\,\varphi(h_m\varrho^2)\,d\varrho = \int A(\varrho)\,\frac{\varrho^4}{r}\,\varphi(h_m\varrho^2)\,d\varrho$$

$$\frac{\pi}{0''2}\int A(\varrho)\,\varrho^4\,\varphi(h_m\varrho^2)\,d\varrho = \int A(\varrho)\,\varrho^3\,\varphi(h_m\varrho^2)\,d\varrho$$

und weiter $\frac{r^2}{\psi(r)} = \varrho^2$.

Setzt man:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\varrho}\,(1 + \Gamma\varrho), \text{ so wird } \frac{\pi_1 - \pi}{0''2} < \Gamma_1,$$

wo Γ_1 den Maximalwert von Γ bedeutet.

Für die von mir als „allgemeine Extinktion" bezeichnete Extinktion ist: $\psi(r) = e^{-\nu r}$.

Hieraus folgt:

$$r\,e^{\frac{\nu}{2}r} = \varrho, \text{ also } \Gamma = \frac{1 - e^{-\frac{\nu}{2}r}}{r}.$$

Für $r = 0$ ist $\Gamma = \frac{\nu}{2}$, für $r = \infty$ $\Gamma = 0$; ferner folgt:

$$\frac{d\Gamma}{dr} = -\frac{1}{r^2}\left[1 - e^{-\frac{\nu}{2}r}\left(1 + \frac{r\nu}{2}\right)\right].$$

Man hat nun

$$e^{-\frac{\nu}{2}r}\left(1 + \frac{r\nu}{2}\right) < 1.$$

Γ nimmt also fortwährend mit wachsendem r ab.

Es ist also $\Gamma < \frac{\nu}{2} = \Gamma_1$, d. h. es ist:

$$\pi_1 - \pi < 0''1\,\nu.$$

Nimmt man allgemein:

$$\psi(r) = e^{-\int_0^r \nu\,dr},$$

wo ν eine beliebige Funktion von r ist, und setzt:

$$\int_0^r \nu \, dr = \varphi(r); \quad \psi(r) = e^{-\varphi(r)},$$

so wird:

$$I = \frac{1 - e^{-\frac{1}{2}\varphi(r)}}{r}.$$

Der absolute Maximalwert wird für ein zunächst unbestimmtes $r = r_1$ stattfinden:

$$I_1 = \frac{1 - e^{-\frac{1}{2}\varphi(r_1)}}{r_1}.$$

Weiterhin ist:

$$\varphi(r_1) = \int_0^{r_1} \nu \, dr = \nu_1 r_1,$$

wo ν_1 ein zwischen größtem und kleinstem Wert von ν liegender Durchschnittswert ist. Unter der Voraussetzung genügend kleiner ν wird also sein: $I_1 = \frac{\nu_1}{2}$, und es wird:

$$\pi_1 - \pi < 0.1 \, \nu_1.$$

Was die Größe von ν betrifft, so habe ich in verschiedenen Ansätzen in (III) Schätzungen vorgenommen aus einem doch wohl zulässigen Prinzip heraus, nämlich dem, daß es unwahrscheinlich sein dürfte, die wirkliche räumliche Dichtigkeit sollte auf größere Strecken mit der Entfernung zunehmen. Merkwürdig ist immerhin, daß meine Schätzungen ungefähr übereinstimmen mit den Versuchen, ν aus der Bestimmung des Farbenindex durch Vergleichung photographischer und photometrischer Intensitäts-Bestimmungen abzuleiten. Allerdings müssen die dabei benutzten Ansätze zum Teil als willkürlich, zum Teil als unzulässig angesehen werden und von der Form dieser Ansätze hängt die schließliche zahlenmäßige Bestimmung der durchschnittlichen Größe der Extinktion ab. Auch

neuerdings angestellte Versuche in dieser Richtung sind im Prinzip keineswegs einwandfrei. Ich hoffe auf diesen Gegenstand bei späterer Gelegenheit zurückzukommen. Jedenfalls dürfte es kaum zweifelhaft sein, daß z. B. bei der „allgemeinen Extinktion“ die Größe ν bedeutend kleiner als etwa $\frac{1}{1000}$ ist. Dann aber wird $\pi_1 - \pi < 0''.0001$. Die Extinktion spielt demnach bei Sternen, die heller als etwa von der 10. Größe sind, kaum eine Rolle, da hier π gewöhnlich zu etwa $0''.003$ angesetzt wird.

Elementare Funktionentheorie und komplexe Integration.

Von **Alfred Pringsheim.**

Vorgetragen in der Sitzung am 6. März 1920.

In einer Mitteilung, die kürzlich unter ähnlichem Titel, wie die vorliegende, in diesen Berichten (S. 65) erschienen ist, hat Herr Adolf Kneser einen Weg angegeben, um das als Grundlage der Cauchy-Riemannschen Funktionentheorie so überaus wirksame Hilfsmittel der *komplexen Integration* auch für die sogenannte *„elementare“*, d. h. Weierstraßische Funktionentheorie nutzbar zu machen. Während nun die Methode des Herrn Kneser, von einer *Spezial*definition des bestimmten Integrals einer Potenz mit positiv-ganzzahligen Exponenten ausgehend, im übrigen dem Weierstraßischen Begriffe des *bestimmten* Integrals (als Differenz der Werte des *unbestimmten* an den Integrationsgrenzen) nach Möglichkeit sich anzuschließen sucht, habe ich, in dem Bestreben einer Weiterbildung der Weierstraßischen Theorie, schon vor ziemlich langer Zeit kein Bedenken getragen, ihr in Gestalt gewisser Mittelwertbildungen als teilweisen Ersatz für die komplexe Integration ein prinzipiell *neues* Hilfsmittel einzufügen[1]) und bin inzwischen auch dazu gelangt, die Einführung der komplexen Integration auf Grund ihrer *allgemeinen* Definition und insbesondere den Beweis ihres Fundamentalsatzes, des Cauchyschen Integralsatzes, so elementar zu gestalten, daß nichts im Wege steht,

[1]) Diese Berichte, Bd. 25 (1895), S. 75 ff. und Math. Ann. 47 (1896), S. 121 ff.

sie der *„elementaren“* Funktionentheorie an geeigneter Stelle anzugliedern. Bevor ich hierauf des näheren eingehe, sei es mir jedoch gestattet, die folgenden Bemerkungen hier einzuschalten.

In einer sehr eingehenden und sorgfältigen Besprechung[1]) der beiden ersten Abteilungen meiner „Vorlesungen über Zahlen- und Funktionenlehre“, als deren leitenden Grundgedanken ich es bezeichnet habe, die *elementaren* Methoden nach Möglichkeit *auszunützen* bzw. *auszubilden*, stellt Herr Hans Hahn die Frage auf (a. a. O., S. 338), was es denn eigentlich mit diesen „elementaren“ Methoden für eine Bewandtnis habe? Welches die Prinzipien seien, um derentwillen die eine Methode als „elementare“ bezeichnet und als solche verwendet werden dürfe, die andere nicht? Welcher charakteristische Unterschied zwischen Potenzreihe und Integral es bewirke, daß die erstere das Fundament einer „elementaren“ Funktionentheorie abgeben könne, das letztere aber nicht? Und Herr Hahn erwartet schließlich von mir, daß ich als besonderer Anhänger jener „elementaren“ Methoden in der Lage sein dürfte, zur Klärung der an diesen Ausdruck sich knüpfenden prinzipiellen Fragen etwas entscheidendes beizutragen. Ohne diese optimistische Ansicht zu teilen, möchte ich die vorliegende Gelegenheit, bei der es sich ja schließlich um eine „Elementarisierung“ der komplexen Integration handeln soll, zu einigen, lediglich meinen Standpunkt kennzeichnenden, keinerlei prinzipielle Geltung beanspruchenden Bemerkungen benützen. Dabei will ich mich, wie es der Zusammenhang mit sich bringt, auf *arithmetische*[2]) Methoden beschränken.

Auch in diesem beschränkten Umfange erscheint es mir von vornherein als ein aussichtsloses Bemühen, den Begriff *„elementare Methoden“* ein für allemal eindeutig und einwandfrei festlegen zu wollen. Man müßte sich denn etwa uner-

[1]) Gött. gelehrte Anzeigen 1919, Nr. 9 und 10, S. 321—347.

[2]) Ich fasse unter dieser Bezeichnung alle möglichen auf die rechnerische Verknüpfung von Zahlen bezüglichen Methoden im Gegensatz zu den *geometrischen* zusammen, mag man sie auch im einzelnen als *algebraische, analytische, infinitesimale, funktionentheoretische* unterscheiden.

bittlich auf den Standpunkt stellen, die Anfangs-Rechenmethoden der Volksschule (in meiner Jugend ausdrücklich und nicht unpassend als „Elementarschule" bezeichnet), also *die vier Spezies* mit *positiven rationalen*[1]) Zahlen als die einzigen *„wirklich" elementaren* arithmetischen Methoden gelten zu lassen. Sowie man versucht, die Grenze höher zu legen, wird der Willkür ein weiter Spielraum geöffnet: ich wüßte nicht, warum es dann nicht freistehen sollte, *jede* Methode als *elementar* zu bezeichnen, wenn sie innerhalb eines bestimmten Zusammenhanges nach genügender Vorbereitung an der richtigen Stelle erscheint. Man kann z. B. die gesamte Lehre von den Funktionen *reeller* Veränderlichen bis in ihre modernsten Verfeinerungen entwickeln, ohne von der Existenz *komplexer* Zahlen den geringsten Gebrauch zu machen[2]). Hält man diesen durchaus berechtigten Standpunkt konsequent fest, so müßte man innerhalb des bezeichneten Zusammenhanges schließlich dazu gelangen, ein Lebesguesches Integral für ein *elementareres* Hilfsmittel anzusehen, als etwa eine n^{te} Einheitswurzel. Auf der anderen Seite glaube ich nicht fehl zu gehen, wenn ich das Bedürfnis, jeder quadratischen Gleichung eine Lösung zu verschaffen, für ein wesentlich *elementareres* erkläre, als dasjenige, einer im Riemannschen Sinne nicht integrierbaren Funktion noch zu einem Integral zu verhelfen, und wenn ich unter diesem Gesichtspunkte die Benützung *komplexer* Zahlen für ein Hilfsmittel äußerst *elementarer* Art halte. Dagegen scheint es mir z. B. *nicht* im Sinne einer *elementaren* Methodik zu liegen, wenn man gleich bei der ersten Einführung der komplexen Zahlen $a + bi$ deren transzendente Umformung:

[1]) Schon die *negativen* Zahlen (von den *irrationalen* und *komplexen* ganz zu schweigen!) scheiden hier aus, da sie mit einem unverkennbaren Stich ins „Nicht-Elementare" belastet sind: man erinnere sich nur, welches Zeitraums und welcher Kämpfe es bedurfte, bis sie das volle arithmetische Bürgerrecht erlangten.

[2]) Nur bei der Integration der rationalen Funktionen würde dieses Prinzip — wenigstens rein theoretisch — eine Lücke hinterlassen, die freilich für die praktische Ausführung der Integration nicht in Betracht kommt.

$$\sqrt{a^2 + b^2} \left\{ \cos \operatorname{arctang} \frac{b}{a} + i \sin \operatorname{arctang} \frac{b}{a} \right\}$$

in Anspruch nimmt (was zumeist auf rein *geometrischem* Wege, ohne ausreichende Erklärung des *arithmetischen* Zusammenhanges geschieht). Andererseits gewinnt das *nämliche* Hilfsmittel sofort den Charakter eines *elementaren*, wenn im Laufe der weiteren Entwickelungen die erforderlichen *Vorbedingungen* sich ergeben haben.

Hiernach wird man, wenn man dem Begriffe *„elementar“* näher kommen will, ihn immer nur als einen *relativen*, *nicht* als einen *absoluten* auffassen dürfen. Und es würde sich dann schließlich nur darum handeln, einen bestimmten Maßstab dafür aufzustellen, *welche* von zwei *vergleichbaren*, d. h. dem gleichen Zwecke dienenden Methoden als die *elementarere* zu gelten habe. Wird dann die als *elementarer* zu erachtende Methode kurzweg als *die elementare* bezeichnet, so scheint mir das nach den Gepflogenheiten unseres Sprachgebrauches gerade so erlaubt zu sein, wie wenn man z. B. von einem *großen* St. Bernhard oder *kleinen* Belt spricht.

Es dürfte kaum auf Widerspruch stoßen, wenn wir, um eine Grundlage zu gewinnen, mit zweckmäßiger Erweiterung des oben gekennzeichneten Standpunktes *die vier Spezies* mit beliebigen *reellen* Zahlen für die *elementarsten* arithmetischen Methoden erklären und, nach Einführung der *komplexen* Zahlen, die entsprechend erweiterten Operationen in diesen Kreis aufnehmen, da sie unmittelbar auf die erstgenannten zurückgeführt werden können. Jedes einzelne andere arithmetische Hilfsmittel mag dann als um so *elementarer* gelten, je begrifflich-einfacher sein Zusammenhang mit den vier Spezies ist und je weniger Schritte erforderlich sind, um es auf diese zurückzuführen. Und dementsprechend wird man eine Gesamtmethode als um so *elementarer* qualifizieren, je *elementarer* die einzelnen Hilfsmittel sind, mit denen sie arbeitet. Das wichtigste, ja man kann wohl sagen, das einzige neue Hilfsmittel, welches die Analysis den vier Spezies hinzufügt, ist der *Grenzwert-*

begriff in seinen mannigfachen Abstufungen und Komplikationen. Er erscheint in seiner *elementarsten*, den vier Spezies am nächsten liegenden Form als Grenzwert einer *abzählbaren* Menge *vorgeschriebener* Zahlen a_ν ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$). Als (sc. möglichst) *elementare* Behandlungsweise der Lehre von der Konvergenz sogenannter unendlicher Prozesse wird man nach dem gesagten eine solche bezeichnen dürfen, die in der Wahl ihrer Hilfsmittel über den eben erwähnten Begriff nicht hinausgeht, mit konsequenter Ausschließung merklich *zusammengesetzterer* Begriffe, wie *Funktion* einer *stetigen* Veränderlichen, *Differentialquotient* und *Integral*. Wenn Herr Hahn zugibt, daß durch eine derartige Beschränkung in der Auswahl der Methoden eine gewisse ästhetische Wirkung erzielt wird, so möchte ich dem hinzufügen, daß ich in einer solchen „ästhetischen" Wirkung eine *sehr* wesentliche (ganz im geheimen vielleicht sogar die wesentlichste) Eigenschaft der reinen Mathematik (d. h. der Mathematik als Selbstzweck) erblicke, und daß daher nach meinem Dafürhalten jede zusammenhängende Darstellung einer mathematischen Theorie in diesem Sinne den Charakter eines Kunstwerkes tragen oder wenigstens anstreben sollte (was vielleicht nicht allgemein anerkannt zu sein, jedenfalls aber nicht allzu oft den wünschenswerten Erfolg zu bringen scheint). Im übrigen bin ich der Ansicht, daß die Vorzüge einer *„elementaren"* Darstellung, wie der in Rede stehenden, mit jener „ästhetischen" Wirkung keineswegs erschöpft sind. Vielmehr glaube ich, daß das Operieren mit den *elementareren* und darum durchsichtigeren Hilfsmitteln in vielen Fällen einen deutlicheren Einblick in das Wesen der Dinge gewährt, als die mechanischer und versteckter arbeitenden Infinitesimal-Methoden. So wird doch z. B. durch die Herleitung der *logarithmischen Konvergenz- und Divergenzkriterien* mit Hilfe der Integration von $D(lg_m x)^{-\varrho}$ und $D\,lg_{m+1} x$ wohl nicht im entferntesten diejenige Einsicht in die hier wirksamen Zusammenhänge gewonnen, wie durch meine freilich weit umständlichere elementare Methode. Als ein nicht ganz wertloses Zeugnis für die Richtigkeit dieser Ansicht darf ich vielleicht die Tatsache an-

führen, daß im Cours d'Analyse von C. Jordan[1]) trotz der sonst sichtlich sehr gedrängten Darstellung und trotzdem doch hier die Infinitesimal-Rechnung das eigentliche Thema bildet und ihre Hilfsmittel bereits vollständig zur Verfügung stehen, jene *elementare* Herleitung in ausführlicher Behandlung der *infinitesimalen* vorangeschickt wird. Auch scheint mir, um noch einige andere Beispiele anzuführen, daß die Lehre von den sogenannten *unbestimmten Quotienten*, den *Doppellimites* einschließlich des Begriffes der *gleichmäßigen Konvergenz*, ebenso die Theorie der *Doppelreihen* ganz wesentlich an Klarheit gewinnt, wenn man mit völliger Ausschaltung des *Stetigkeits*-begriffs sich zunächst auf die Betrachtung *abzählbarer* Zahlenmengen beschränkt.

Im vorstehenden dürften auch bereits die erforderlichen Anhaltspunkte zur Beantwortung der von Herrn Hahn aufgeworfenen Frage enthalten sein: „Was ist der charakteristische Unterschied zwischen den Grenzprozessen, die im Begriffe der Potenzreihe und dem des Integrals stecken, und der es bewirkt, daß jener das Fundament einer „elementaren" Funktionentheorie abgeben kann, dieser aber nicht?" Macht man das *komplexe Integral* zur Grundlage für den Aufbau der Funktionentheorie (d. h. der Theorie der analytischen Funktionen komplexer Veränderlichen), so erscheint diese zunächst als eine durchaus naturgemäße Ergänzung und Weiterbildung der *reellen Infinitesimal-Analysis*. Diese Auffassung stimmt vollständig mit der historischen Entwickelung überein[2]) und

[1]) 2ième éd. 1 (1893), No. 303—308.

[2]) Die ersten hierher gehörigen Cauchyschen Arbeiten verfolgen ausgesprochenermaßen nur den Zweck, in der *komplexen* Integration ein neues Hilfsmittel zur Berechnung *reeller* bestimmter Integrale zu gewinnen. Es sind dies die Zusätze, die Cauchy der schon im Jahre 1814 verfaßten, aber erst 1825 (in den Mém. des Savans étrangers I) veröffentlichten Abhandlung: „Mémoire sur la théorie des intégrales définies" bei dieser Gelegenheit hinzufügte; sodann namentlich die als besondere Schrift gleichfalls 1825 erschienene Abhandlung: „Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires." Die Zusätze zur erstgenannten Arbeit enthalten bereits den Cauchyschen Integralsatz

findet eine äußerliche Bestätigung in der Tatsache, daß seit etwa einem halben Jahrhundert die Funktionentheorie der fraglichen Richtung einen ansehnlichen Bestandteil der meisten größeren, als *Traité d'Analyse* oder *Cours d'Analyse* bezeichneten französischen Lehrbücher bildet. Man darf wohl sagen, daß in *diesem* Zusammenhange das *komplexe Integral* nach genügender Vorbereitung an durchaus passender Stelle erscheint, daß man also im Anschluß an die oben gemachte Bemerkung berechtigt wäre, ihm die Bezeichnung eines *elementaren* Hilfsmittels beizulegen und es als geeignete Grundlage für eine *elementare* Funktionentheorie anzusehen. Doch was wäre damit gewonnen? Daß auf Grund der von *mir* vorgeschlagenen Definition die *Potenzreihe* als eine wesentlich *elementarere* Grundlage zu gelten hätte, bedarf wohl keiner weiteren Ausführung. Aber, auch wenn ich, ohne auf dieser Definition zu bestehen, mir alle die komplizierten Gedankenreihen vergegenwärtige, welche erforderlich sind, um die Begriffe des *komplexen Integrals* und der (in dem fraglichen Zusammenhange ja unentbehrlichen) *komplexen Differenzierbarkeit* gründlich festzulegen, so komme ich zu dem Schlusse: selbst der ärgste Gegner der *Potenzreihen* könnte keine Definition des Begriffes *„elementar"* ersinnen, bei deren Anwendung die Potenzreihe nicht den Sieg über das komplexe Integral davontragen müßte. Ich kann es mir nicht versagen, in diesem Zusammenhange noch die Aussage eines sicherlich völlig unverdächtigen Zeugen zu meinen Gunsten anzuführen: in der Vorrede zu seinem „Lehrbuch der Funktionentheorie"[1]) erklärt sich Herr Osgood für möglichste Ausmerzung der Potenzreihen aus der Funktionentheorie und fährt dann fort: „Doch darf man aus praktischen Gründen jene Reihe nicht zu sehr verdrängen, denn sie dient dem Anfänger zur Übung." Also: die *Potenzreihe* als *corpus vile* zur Schulung der Anfänger — gewiß doch ein recht schlagendes Zeugnis

für die Begrenzung eines *Rechtecks*, in der zweiten findet sich die Ausdehnung auf einen (im damaligen Sinne) *beliebigen* geschlossenen Integrationsweg.

[1]) 1907, S. IV.

für ihren äußerst *elementaren* Charakter. Aus alledem glaube ich die volle Berechtigung entnehmen zu dürfen, die auf die Lehre von den *Potenzreihen* aufgebaute Funktionentheorie als die *elementarere* und, um sie nicht beständig mit diesem schwerfälligen Komparativ zu belasten, schlechthin als die *elementare* zu bezeichnen.

Viel wichtiger als diese Namensfrage scheint mir aber die Frage nach der *Existenzberechtigung* jener *elementaren* Funktionentheorie. Man wird ihr, wie ich ohne Widerspruch annehmen zu dürfen glaube, bei angemessener Darstellung wiederum eine gewisse harmonische Einheitlichkeit und daraus entspringende ästhetische Wirkung zubilligen. Ich bin indessen der Meinung, daß sie doch noch andere nicht unerhebliche Vorzüge besitzt: mir erscheint nicht nur die Wahl des Ausgangspunktes und die daraus sich ergebende Anordnung des ganzen Aufbaus viel natürlicher, ich möchte sagen selbstverständlicher, als bei der Cauchyschen Theorie, sondern es zeigt sich auch hier wieder, daß die Anwendung der *elementareren* Methoden zumeist eine klarere Einsicht in das Zustandekommen der grundlegenden Ergebnisse und deren arithmetischen Zusammenhang ermöglicht, welcher durch den beweiskürzenden Mechanismus der komplexen Integration meist völlig verdeckt wird. Es ist hier nicht der Ort, diese meine Ansicht mit der nötigen Ausführlichkeit zu begründen, ich beschränke mich daher auf die folgenden Bemerkungen.

Die Erforschung der *Potenzreihen*, als der durch Hinzunahme des Grenzwertbegriffes entstehenden Verallgemeinerung des *einfachsten* Funktionstypus, der ganzen rationalen Funktionen einer komplexen Veränderlichen, entspricht einem unmittelbaren logischen Bedürfnis. Sie führt in bekannter Weise zu den Begriffen der *analytischen Fortsetzung* und der *analytischen Funktion* und zeigt, daß eine solche Funktion durch eine *abzählbare Menge von Konstanten* in ihrem ganzen Verlaufe bestimmt wird. Die naheliegende Vermutung, daß auch umgekehrt jene Konstanten durch eine passend gewählte *abzählbare Menge von Funktionswerten* darstellbar sein dürften,

läßt sich unmittelbar durch Benützung einer gewissen Gattung von *Mittelwerten*[1]) bestätigen, die begrifflich *wesentlich einfachere* arithmetische Konstruktionen als die *Integrale*, insbesondere *keine unmittelbaren Spezialfälle*[2]) der letzteren sind. Man findet auf diese Weise, wenn $f(x) = \sum_0^\infty \lambda a_\lambda (x - x_0)^\lambda$ gesetzt wird und der Kreis $|x - x_0| = r$ dem Bereiche gleichmäßiger Konvergenz dieser Reihe angehört[3]):

$$(1)\quad a_\lambda = \mathfrak{M}\,(r^{-\lambda} f(x_0 + r)) \equiv \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} \sum_1^{2^n} \nu\, (\alpha^\nu r)^{-\lambda} f(x_0 + \alpha^\nu r)$$

$$(\lambda = 0, 1, 2, \ldots),$$

unter α die Hauptwurzel der Gleichung $x^{2^n} = 1$ verstanden.

Vergleichen wir hiermit die entsprechenden Anfangsschritte der Cauchyschen Theorie. Man geht hier von der Frage aus: Was läßt sich von einer Funktion $f(x)$ aussagen, von der man nichts weiter weiß, als daß sie in irgend einem zusammenhängenden Bereiche eindeutig ist und im komplexen Sinne einen Differentialquotienten besitzt? Mir erscheint diese Fragestellung äußerst willkürlich. Warum verlangt man überhaupt einen Differentialquotienten „im komplexen Sinne?“ Es wäre ja möglich, daß man mit einer noch geringeren Forderung auskommt[4]). Oder aber: Warum verlangt man nicht gleich Differentialquotienten jeder beliebigen Ordnung? Oder zum mindesten noch einen solchen zweiter Ordnung — eine Forderung, die ja bei Zurückführung der Differentiationsbedingung auf Beziehungen zwischen reellen partiellen Differentialquotienten durch die in diesem Zusammenhange sich ergebende Laplacesche Differentialgleichung geradezu suggeriert wird?

---

[1]) Math. Ann. 47 (1896).

[2]) Das Gegenteil wäre nur der Fall, wenn die Mittelwertbildung sich auf ein *reelles Intervall* der Veränderlichen x bezöge.

[3]) A. a. O., S. 138, Gl. (3).

[4]) Das ist in der Tat der Fall: vgl. L. Lichtenstein: Über einige Integrabilitätsbedingungen zweigliedriger Differentialausdrücke mit einer Anwendung auf den Cauchyschen Integralsatz. (Sitzungsber. Math. Ges. Berlin, 9 [22. Juni 1910], S. 86 ff.)

Die Antwort kann nur lauten: Weil der *Erfolg* diese Fragestellung rechtfertigt, ein Erfolg, der auf einer glänzenden, aber zunächst für ganz andere Zwecke[1]) gemachten Entdeckung, dem Cauchyschen Integralsatze [einschließlich der Goursatschen Vervollkommnung[2])] beruht. Als wichtigste Folgerung erscheint dann zunächst, falls $f(x)$ in der Umgebung $|x - x_0| \leq r$ eindeutig und differenzierbar ist, der Cauchysche Randintegralsatz, nämlich:

$$(2) \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+(K)} \frac{f(z)\,dz}{z - x},$$

wenn man mit $+(K)$ den in positiver Integrationsrichtung zu durchlaufenden Kreis $|x - x_0| = r$ bezeichnet. Das hierin liegende Ergebnis, daß die Werte der Funktion $f(x)$ im ganzen *Innern* des Kreises (K) durch ihre Werte auf dem *Rande* (K) völlig eindeutig bestimmt sind, erscheint in *diesem* Zusammenhange als äußerst überraschende Wirkung eines geheimnisvollen Mechanismus, obschon es doch sehr viel weniger besagt, als die oben auf Grund einer nahe liegenden Vermutung und vermittelst einer sehr einfachen und durchsichtigen Rechnung gewonnene Gleichung (1). Freilich kann man ja von Gl. (2) ausgehend zu dem mit Gl. (1) analogen Ergebnis[3]) (dem Cauchy-Taylorschen Satz) gelangen:

$$(3) \quad f(x) = \sum_0^\infty \lambda\, a_\lambda (x - x_0)^\lambda, \quad \text{wo: } a_\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{+(K)} \frac{f(z)\,dz}{(z - x_0)^{\lambda+1}},$$

d. h. man landet schließlich an demselben Punkte, von dem man bei der zuerst besprochenen Methode ausgegangen war, und muß dann, um zu einem brauchbaren Begriffe der analy-

---

[1]) Vgl. S. 150, Fußn. 2).

[2]) Ohne diese müßte man ja $f'(x)$ noch als *stetig* oder zum mindesten mit gewissen *Integrabilitäts*-Eigenschaften behaftet voraussetzen, wie früher (wenn auch zuweilen nur stillschweigend) zu geschehen pflegte.

[3]) Man beachte, wie der durchsichtige Inhalt von Gl. (1) in der Form von Gl. (3) durch das überflüssige Eindringen des Fremdkörpers π verdunkelt wird.

tischen Fortsetzung zu gelangen, einen erheblichen Teil der „elementaren" Betrachtungen nachholen, die im ersten Falle den Ausgangspunkt bildeten[1]). Dafür hat man allerdings die

[1]) Herr Osgood, der ja die Potenzreihen lediglich als ein zweckmäßiges Übungsmaterial für Anfänger ansieht, macht a. a. O. (s. oben S. 151) die folgende Bemerkung: „Es ist vielleicht nicht allgemein bekannt, daß die Taylorsche Reihenentwickelung für die Begründung der Funktionentheorie durchaus entbehrlich ist, die Beweise gestalten sich sogar einfacher, wenn man sich nur des Analogons des Mittelwertsatzes in der Differentialrechnung (Kap. 7, § 7) bedient." Wie aus dem letzten Hinweise hervorgeht, ist unter dem „Analogon zum Mittelwertsatze" die Entwickelung der Integralformel (2) des Textes nach Potenzen von $x - x_0$ mit dem *Restintegral* $\frac{(x-x_0)^n}{2\pi i} \int_{+(K)} \frac{f(z)\,dz}{(z-x_0)^n (z-x)}$ zu verstehen. Wie durch das beständige Mitschleppen dieses Restgliedes eine *Vereinfachung* der zur Begründung der Funktionentheorie dienenden Beweise eintreten soll, entzieht sich in der Tat meiner Kenntnis. Dagegen möchte ich mir gestatten, noch auf eine andere von Herrn Osgood a. a. O. ausgesprochene Ansicht etwas näher einzugehen. An die Ankündigung, daß der Beweis des sogenannten Weierstraßischen Doppelreihensatzes und gewisser daraus resultierender Folgerungen durch Anwendung der komplexen Integration vereinfacht werde, knüpft er die folgenden Bemerkungen: „Aber auch die Sätze selbst gewinnen an Deutlichkeit durch das Abstreifen des Nebensächlichen, welches in der häufigen Erwähnung der Potenzreihen besteht. In der Tat beziehen sich die wichtigsten unter diesen Sätzen auf *Funktionen*. Daß diese nach dem Taylorschen Lehrsatze entwickelbar sind, ist hier belanglos." Der erste Satz dieser Aussage hat überhaupt keinen Sinn: denn, wie können die *Sätze* in der Osgoodschen Fassung an *Deutlichkeit* gewinnen, da sie genau so lauten, wie in der Weierstraßischen Theorie? Es könnte also höchstens ihr *Wesen*, ihre *Grundlage* an *Deutlichkeit* gewinnen. Das *Gegenteil* ist aber der Fall: denn das *wahre Wesen*, die *unmittelbar einleuchtende Grundlage* der Sätze besteht in der einfachen Tatsache, daß unter den gemachten Voraussetzungen die *Summe unendlich vieler Potenzreihen* sich in eine *einfache Potenzreihe* umordnen läßt, und wird durch Anwendung der komplexen Integration *nicht verdeutlicht*, sondern *verdunkelt*. Ob man die hierdurch erzielte *mäßige* Abkürzung des Beweises als ausreichendes Äquivalent ansehen soll, scheint mir zum mindesten zweifelhaft. Doch möchte ich zu völliger Klarstellung des wahren Sachverhalts noch auf folgendes hinweisen. Faßt man den sogenannten Vitalischen Satz ins Auge, der ja eine wesentliche

fraglos wertvolle Erfahrung gemacht, daß der scheinbar allgemeinere Begriff der differenzierbaren Funktion nicht weiter trägt, als der auf die Entwickelbarkeit in Potenzreihen aufgebaute. Aber ist es wirklich so dringend notwendig, vor allen Dingen *diese* Tatsache festzustellen? Es dürfte doch schwerlich irgend einem Mathematiker einfallen, die *rationalen* Funktionen *von vornherein* als solche zu *definieren*, die eindeutig, differenzierbar und nur mit Polen behaftet sind, und sodann nachzuweisen, daß jede solche Funktion als Quotient zweier Polynome (von denen das eine sich auch auf eine Konstante reduzieren kann) darstellbar ist. Wogegen jeder, der von dieser letzteren *Darstellungsform* als der üblichen *Definition* einer *rationalen* Funktion ausgeht, es sicher als eine erfreuliche Erweiterung seiner Kenntnisse betrachten wird, wenn er späterhin einmal erfährt, daß die oben genannten Eigenschaften schon ausreichen, um eine Funktion als *rationale* zu qualifizieren. Und so scheint es mir weitaus angemessener, wenn man seinen Wissensdrang zunächst auf das bescheidenere Ziel der in *Potenzreihen* entwickelbaren (also an eine bestimmte *Darstellungsform* geknüpften) Funktionen richtet und die passende Gelegenheit abwartet, um zu erkennen, daß schon durch die bloße Voraussetzung der *Eindeutigkeit* und *Differenzierbarkeit* die *Entwickelbarkeit* in Potenzreihen gesichert erscheint, was sich (mit der unerheblichen Zusatzforderung der *Stetigkeit* des Differential-

---

Vervollkommnung des obigen Weierstraßischen darstellt, so erscheint das *unmittelbare* Ansetzen der Integrationsmaschine auf Grund der bestehenden Voraussetzungen ausgeschlossen. Infolgedessen gestaltet sich der ursprüngliche, auf dem Cauchyschen Funktionsbegriff *ohne* Taylorsche Reihe beruhende Vitalische Beweis (Annali di Mat. (3), 10 [1904], p. 73, 74) ziemlich schwierig. Vergleicht man ihn (oder auch jeden der späteren Beweise) mit dem auf der Taylorschen Reihenentwickelung beruhenden, geradezu klassisch einfachen Beweise des Herrn E. Lindelöf (Bull. Soc. Math. de France 41 [1913], p. 171), so kann für jeden Einsichtigen wohl kein Zweifel darüber bestehen, *wo* die wahren Grundlagen des fraglichen Satzes zu suchen sind. Es scheint danach, daß die Beschäftigung mit Potenzreihen auch fortgeschritteneren Mathematikern zu nützlicher Übung dienen kann.

quotienten) auch durch die von mir als *elementar* bezeichneten Methoden feststellen läßt[1]). Damit ist dann dieses ursprünglich der Cauchyschen Theorie angehörige, äußerst wichtige und bequeme *Erkennungszeichen* für den analytischen Charakter einer Funktion auch für die *elementare* Funktionentheorie gewonnen und zugleich die wünschenswerte Beziehung zwischen den Grundlagen beider Theorien hergestellt[2]). In demselben Sinne habe ich mich auch bemüht, die *komplexe Integration*, insbesondere also den Cauchyschen *Integralsatz* „an passender Stelle", d. h. da, wo die elementar*eren* Hilfsmittel nicht mehr ausreichen, der *elementaren* Funktionentheorie einzuverleiben. Nach einem früheren noch unvollkommenen Versuche[3]) in dieser Richtung ist es mir neuerdings gelungen, die aufzuwendenden Beweismittel so zu vereinfachen, daß damit die untere Grenze derartiger Möglichkeiten wohl so ziemlich erreicht sein dürfte.

Den eigentlichen Kernpunkt der folgenden Untersuchung bildet der § 1, in welchem das Integral der ganzzahligen *Potenz* [außer der $(-1)^{\text{ten}}$] direkt aus der üblichen Definition als Summe eines Grenzwertes berechnet wird. Ich halte es nicht für ausgeschlossen, daß die von mir durchgeführte Betrachtung manchem Leser geradezu trivial erscheinen dürfte, würde aber darin nur eine erfreuliche Bestätigung ihres wahrhaft „elementaren" Charakters erblicken, während ich andererseits guten Grund für die Annahme zu haben glaube[4]), daß die Möglichkeit, das fragliche Integral mit Hilfe der hier angegebenen Methode zu berechnen, bisher nicht bemerkt worden ist. Sie beruht auf einer einfachen identischen Umformung der betreffenden Definitionsgleichung und besitzt den besonderen Vorzug, in Bezug auf die Wahl des Integrationsweges jede bisher für

---

[1]) Vgl. weiter unten § 3, Nr. 3, S. 176.

[2]) Ich halte es übrigens vom historischen Standpunkt aus nicht für unmöglich, daß die Entdeckung des Cauchy-Taylorschen Satzes den ersten Anstoß zur Ausbildung der Weierstraßischen Funktionentheorie gegeben hat.

[3]) Diese Berichte, Bd. 26 (1896), S. 179.

[4]) Vgl. S. 164, Fußn. 1).

zulässig gehaltene Freiheit zu gestatten, ohne daß es erforderlich wäre, in eine jener recht mühsamen Diskussionen einzutreten, welche darauf hinauslaufen, zusammengesetzte, mit allen möglichen modernen Komplikationen ausgestattete Integrationswege in einfachere zu zerlegen und schließlich durch polygonale zu approximieren. Aus dem für das Integral der ganzen *Potenz* gewonnenen Resultat ergibt sich in § 2 durch einfache Synthese das entsprechende für eine *Potenzreihe* und sodann in § 3 für eine längs irgend eines Integrationsweges *regulärc*, d. h. durch ein System ineinander greifender Potenzreihen eindeutig definierte *analytische Funktion*, schließlich *der Cauchyschc Integralsatz* für *reguläre* Funktionen bei Benützung *„beliebiger“*, d. h. nur den Bedingungen der Stetigkeit und Rektifizierbarkeit genügender Integrationswege: *er erscheint hier als das Resultat eines bis in die letzten Einzelheiten durchsichtigen Rechenexempels.* Die Ausdehnung des gewonnenen Ergebnisses auf *stetig differenzierbare* Funktionen erfolgt dann unmittelbar durch Berufung auf das oben (S. 153) erwähnte Resultat meiner elementaren Methoden, während für die Aufhebung der *Stetigkeits*voraussetzung nur noch der (sehr einfache) Beweis der Goursatschen Verallgemeinerung des Cauchyschen Satzes für ein *Dreieck*[1]) erforderlich erscheint. In § 4 werden die vorstehenden Betrachtungen noch durch eine elementare Berechnung des Integrals $\int \frac{dx}{x}$ für einen geschlossenen Weg um den Nullpunkt ergänzt und durch Anwendung auf die Herleitung des Cauchyschen Randintegral- und Residuensatzes zum Abschluß gebracht.

[1]) Vgl. S. 177, Fußnote.

§ 1. Das bestimmte Integral der Potenz mit ganzzahligen Exponenten m, ausgenommen $m = -1$.

1. Es sei $x = \xi + \eta i$ eine *komplexe*, t eine *reelle* Veränderliche, und es werde gesetzt:

$$(1) \qquad \xi = \varphi(t), \quad \eta = \psi(t), \quad \text{also: } x = \varphi(t) + i \cdot \psi(t),$$

wo $\varphi(t)$, $\psi(t)$ für ein gewisses Intervall $t_0 \leqq t \leqq T$ bzw. $t_0 \geqq t \geqq T$ *eindeutige* und *stetige* Funktionen vorstellen, deren Auswahl nur der folgenden Einschränkung unterliegen soll. Es möge das Intervall (t_0, T) durch Einschaltung von $n-1$ Zwischenwerten:

$$t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < T$$
$$\text{bzw. } T < t_{n-1} < t_{n-2} < \cdots < t_1 < t_0$$

in n Teilintervalle zerlegt werden, und es werde analog mit Gl. (1) gesetzt:

$$(2) \qquad \begin{cases} x_\nu = \varphi(t_\nu) + i\,\psi(t_\nu) = \xi_\nu + \eta_\nu i & (\nu = 0, 1, \ldots n-1) \\ X = \varphi(T) + i\,\psi(T) = \Xi + H i. \end{cases}$$

Die durch Gl. (1) definierten Punkte x liefern dann einen von x_0 bis X sich erstreckenden *stetigen Weg*, den wir als den Weg $(x_0 \ldots X)$ bezeichnen wollen und auf welchem insbesondere die Punkte x_ν liegen. Die oben bezeichnete Einschränkung soll dann darin bestehen, daß die *Länge der gebrochenen Linie* (des „Sehnenpolygons"): $\overline{x_0 x_1 \ldots x_{n-1} X}$, also die *Summe*: $\sum_1^n{}^\nu |x_\nu - x_{\nu-1}|$ (wo: $x_n \equiv X$) bei jeder beliebigen Wahl der t_ν bzw. x_ν, insbesondere auch bei unbegrenzter Vergrößerung von n und gleichzeitigem $\lim_{n\to\infty}(t_\nu - t_{\nu-1}) = 0$ (also auch: $\lim_{n\to\infty}(x_\nu - x_{\nu-1}) = 0$) stets *unter einer endlichen Schranke* bleibt, etwa:

$$(3) \qquad \sum_1^n{}^\nu |x_\nu - x_{\nu-1}| < L \quad (\text{wo: } x_n \equiv X).$$

Man erkennt unmittelbar, daß diese Bedingung sicher erfüllt ist, wenn die Funktionen $\varphi(t)$, $\psi(t)$ *monoton*, also auch dann, wenn sie nur *abteilungsweise monoton* sind. Denn im ersten dieser Fälle hat man offenbar:

$$\sum_1^n{}^{\nu} |x_\nu - x_{\nu-1}| = \sum_1^n{}^{\nu} \sqrt{(\xi_\nu - \xi_{\nu-1})^2 + (\eta_\nu - \eta_{\nu-1})^2}$$

$$< \sum_1^n{}^{\nu} (|\xi_\nu - \xi_{\nu-1}| + |\eta_\nu - \eta_{\nu-1}|) = |\Xi - \xi_0| + |H - \eta_0|.$$

Im übrigen folgt aus (3), daß dann gleichzeitig:

$$(4) \quad \sum_1^n{}^{\nu} |\varphi(t_\nu) - \varphi(t_{\nu-1})| < L, \quad \sum_1^n{}^{\nu} |\psi(t_\nu) - \psi(t_{\nu-1})| < L,$$

während umgekehrt auch diese beiden Bedingungen eine solche von der Form (3) (mit $2L$ statt L) nach sich ziehen. Die *notwendige und hinreichende* Bedingung für die Existenz der Beziehung (3) besteht also darin, daß $\varphi(t)$, $\psi(t)$ Ungleichungen von der Form (4) genügen, d. h. Funktionen *von beschränkter Variation* sein müssen.

Des weiteren läßt sich leicht zeigen[1]), daß unter Voraussetzung der Stetigkeit von $\varphi(t)$, $\psi(t)$ die durch Ungl. (3) geforderte *Beschränktheit* der Sehnenpolygone allemal schon die Existenz eines bestimmten *Grenzwertes*: $\lim_{n\to\infty} \sum_1^n{}^{\nu} |x_\nu - x_{\nu-1}| = l$,

[1]) Für die Fassung $\eta = f(\xi)$ zuerst bewiesen von L. Scheeffer: Acta Math. 5 (1885), S. 54, Theorem I. Die Voraussetzung der Stetigkeit läßt sich durch die allgemeinere ersetzen, daß $f(\xi)$ bzw. $\varphi(t)$, $\psi(t)$ keine *„äußeren Sprünge"* besitzen dürfen, d. h. daß z. B. $f(\xi)$ niemals das Intervall $f(\xi - 0)$, $f(\xi + 0)$ verläßt: a. a. O., Theorem II. — Die Form $\xi = \varphi(t)$, $\eta = \psi(t)$ bei C. Jordan, Cours d'Analyse, 2ième éd. 1 (1893), No. 106, 107. Doch nennt Jordan eine Kurve *nur dann rektifizierbar*, wenn sie zugleich *stetig* ist: a. a. O., No. 110. Anders G. Kowalewski (Grundzüge der Differential- und Integralrechnung [1909], S. 327), welcher auch *unstetige* Kurven mit konvergenten Sehnenpolygonen als *rektifizierbar* bezeichnet. Um jedes Mißverständnis auszuschließen, bezeichne ich die hier verwendeten Integrationswege ausdrücklich als *stetig* und rektifizierbar und, wenn gelegentlich von „Wegen" schlechthin die Rede ist, so sind immer solche Wege gemeint.

also einer bestimmten *Weglänge* l nach sich zieht, und da das umgekehrte ja ohne weiteres ersichtlich ist, so erscheint die Bedingung (3) schließlich äquivalent mit der *Rektifizierbarkeit* des stetigen Weges $(x_0 \ldots X)$. Übrigens sei hervorgehoben, daß diese Erkenntnis zwar für die Wertung der folgenden Resultate, nicht aber für deren Herleitung in Betracht kommt, welche letztere lediglich die Bedingung (3) in Anspruch nimmt, also insbesondere bei der Beschränkung auf abteilungsweise monotone Wege keiner weiteren Diskussion bedarf.

2. Unter der Voraussetzung eines *stetigen* und der Bedingung (3) genügenden, also *rektifizierbaren* Weges $(x_0 \ldots X)$ beweisen wir nun den folgenden Fundamentalsatz:

Man hat für jedes von (-1) *verschiedene ganzzahlige* m:

$$\text{(I)} \quad \lim_{n \to \infty} \sum_1^n{}^{\nu} (x_\nu - x_{\nu-1})\, x_\nu^m = \frac{1}{m+1} (X^{m+1} - x_0^{m+1}) \qquad (x_n \equiv X)$$

bei beliebiger Wahl der Zwischenpunkte x_ν, *sofern nur für* $n \to \infty$ *durchweg* $\lim_{n \to \infty} (x_\nu - x_{\nu-1}) = 0$ *wird und im Falle* $m < 0$ *stets* $|x| \geq \varrho > 0$ *ist.*

Beweis. Die Richtigkeit der Beziehung (I) für $m = 0$ ist ohne weiteres ersichtlich.

Sei nun zunächst p eine *positive* ganze Zahl, also $p \geq 1$, so hat man identisch:

$$(p+1)\, x_\nu^p = \sum_0^p{}^{\lambda} (x_\nu^p - x_\nu^{p-\lambda} x_{\nu-1}^\lambda) + \sum_0^p{}^{\lambda} x_\nu^{p-\lambda} x_{\nu-1}^\lambda$$

$$= \sum_1^p{}^{\lambda} x_\nu^{p-\lambda} (x_\nu^\lambda - x_{\nu-1}^\lambda) + \frac{x_\nu^{p+1} - x_{\nu-1}^{p+1}}{x_\nu - x_{\nu-1}}$$

$$(p+1)(x_\nu - x_{\nu-1})\, x_\nu^p = (x_\nu - x_{\nu-1}) \sum_1^p{}^{\lambda} x_\nu^{p-\lambda} (x_\nu^\lambda - x_{\nu-1}^\lambda) + (x_\nu^{p+1} - x_{\nu-1}^{p+1}),$$

also durch Summation über $\nu = 1, 2, \ldots n$:

$$(p+1) \sum_1^n{}^{\nu} (x_\nu - x_{\nu-1})\, x_\nu^p = \sum_1^n{}^{\nu} (x_\nu - x_{\nu-1}) \sum_1^p{}^{\lambda} x_\nu^{p-\lambda} (x_\nu^\lambda - x_{\nu-1}^\lambda)$$
$$+ X^{p+1} - x_0^{p+1},$$

und daher:

$$(5)\qquad \begin{cases} \left|(p+1)\sum_1^n{}^{\nu}(x_\nu - x_{\nu-1})\,x_\nu^p - (X^{p+1} - x_0^{p+1})\right| \\ \quad \leq \sum_1^n{}^{\nu}\left|x_\nu - x_{\nu-1}\right| \sum_1^p{}^{\lambda}\left|x_\nu\right|^{p-\lambda}\cdot\left|x_\nu^\lambda - x_{\nu-1}^\lambda\right|. \end{cases}$$

Ist nun etwa r die obere Grenze der $|x|$, so hat man zunächst zur Abschätzung der letzten Summe:

$$\begin{aligned} &x_\nu\left|{}^{p-\lambda}\;x_\nu^\lambda - x_{\nu-1}^\lambda\right| \\ &= x_\nu\left|{}^{p-\lambda}\right|x_\nu - x_{\nu-1}\left|\,\right|x_\nu^{\lambda-1} + x_\nu^{\lambda-2}\,x_{\nu-1} + \cdots + x_{\nu-1}^{\lambda-1}\right|^{1}) \\ &\leq \lambda\, r^{p-1}\left|x_\nu - x_{\nu-1}\right|, \end{aligned}$$

also:

$$\sum_1^p{}^{\lambda}\left|x_\nu\;{}^{p-\lambda}\;x_\nu^\lambda - x_{\nu-1}^\lambda\right| \leq \tfrac{1}{2}\,p\,(p+1)\,r^{p-1}\cdot\left|x_\nu - x_{\nu-1}\right|,$$

und:

$$(6)\qquad \begin{cases} \sum_1^n{}^{\nu}\left|x_\nu - x_{\nu-1}\right| \sum_1^p{}^{\lambda}\left|x_\nu\;{}^{p-\lambda}\right|x_\nu^\lambda - x_{\nu-1}^\lambda\right| \\ \quad \leq \tfrac{1}{2}\,p\,(p+1)\,r^{p-1}\sum_1^n{}^{\nu}\left|x_\nu - x_{\nu-1}\right|^2. \end{cases}$$

Wird jetzt zu beliebig klein angenommenen $\delta > 0$ eine untere Schranke für n so fixiert, daß für jedes ν:

$$(7)\qquad \left|x_\nu - x_{\nu-1}\right| < \delta,$$

so geht die Ungleichung (5) mit Benützung von (6), (7) und (3) in die folgende über:

$$\left|(p+1)\sum_1^n{}^{\nu}(x_\nu - x_{\nu-1})\,x_\nu^p - (X^{p+1} - x_0^{p+1})\right| < \delta\cdot\tfrac{1}{2}\,p\,(p+1)\,r^{p-1}\,L,$$

und man findet somit:

$$(8)\qquad \lim_{n\to\infty}\sum_1^n{}^{\nu}(x_\nu - x_{\nu-1})\,x_\nu^p = \frac{1}{p+1}\,(X^{p+1} - x_0^{p+1}).$$

Um das entsprechende Resultat für negative Exponenten abzuleiten, gehen wir für $p \geq 1$ von der Identität aus:

---

[1]) Gilt auch für $\lambda = 1$, in welchem Falle der letzte Faktor sich auf 1 reduziert, die betreffende Gleichung in eine vollkommene Identität übergeht.

$$p\,x_\nu^{-(p+1)} = \sum_1^p{}^\lambda \left(x_\nu^{-(p+1)} - x_\nu^{\lambda-p-1}\,x_{\nu-1}^{-\lambda}\right) + \sum_1^p{}^\lambda\, x_\nu^{\lambda-p-1}\,x_{\nu-1}^{-\lambda}$$

$$= -\sum_1^p{}^\lambda\, x_\nu^{-(p+1)}\,x_{\nu-1}^{-\lambda}\left(x_\nu^\lambda - x_{\nu-1}^\lambda\right) + x_\nu^{-p}\,x_{\nu-1}^{-p}\sum_1^p{}^\lambda\, x_\nu^{\lambda-1}\,x_{\nu-1}^{p-\lambda}$$

$$p\,(x_\nu - x_{\nu-1})\,x_\nu^{-(p+1)} = -(x_\nu - x_{\nu-1})\sum_1^p{}^\lambda\, x_\nu^{-(p+1)}\,x_{\nu-1}^{-\lambda}\left(x_\nu^\lambda - x_{\nu-1}^\lambda\right)$$

$$+ x_\nu^{-p}\,x_{\nu-1}^{-p}\left(x_\nu^p - x_{\nu-1}^p\right)$$

$$= -(x_\nu - x_{\nu-1})\sum_1^p{}^\lambda\, x_\nu^{-(p+1)}\,x_{\nu-1}^{-\lambda}\left(x_\nu^\lambda - x_{\nu-1}^\lambda\right) - \left(x_\nu^{-p} - x_{\nu-1}^{-p}\right).$$

Summiert man wieder über $\nu = 1, 2, \ldots n$, so findet man:

$$p\sum_1^n{}^\nu\,(x_\nu - x_{\nu-1})\,x_\nu^{-(p+1)}$$

$$= -\sum_1^n{}^\nu\,(x_\nu - x_{\nu-1})\sum_1^p{}^\lambda\, x_\nu^{-(p+1)}\,x_{\nu-1}^{-\lambda}\left(x_\nu^\lambda - x_{\nu-1}^\lambda\right) - \left(X^{-p} - x_0^{-p}\right),$$

und daher:

$$(9)\quad \begin{cases} \left| p\sum_1^n{}^\nu\,(x_\nu - x_{\nu-1})\,x_\nu^{-(p+1)} + \left(X^{-p} - x_0^{-p}\right)\right| \\ \leqq \sum_1^n{}^\nu\,|x_\nu - x_{\nu-1}|\cdot\sum_1^p{}^\lambda\,|x_\nu|^{-(p+1)}\cdot|x_{\nu-1}|^{-\lambda}\cdot\left|x_\nu^\lambda - x_{\nu-1}^\lambda\right|. \end{cases}$$

Um die letzte Summe abzuschätzen, hat man mit Benützung der Voraussetzung $|x| \geqq \varrho > 0$:

$$|x_\nu|^{-(p+1)}\,|x_{\nu-1}|^{-\lambda}\left|x_\nu^\lambda - x_{\nu-1}^\lambda\right|$$

$$= |x_\nu|^{-(p+1)}\,|x_{\nu-1}|^{-\lambda}\,|x_\nu - x_{\nu-1}|\sum_0^{\lambda-1}{}^\varkappa\,|x_\nu|^\varkappa\,|x_{\nu-1}|^{\lambda-1-\varkappa}$$

$$= |x_\nu - x_{\nu-1}|\sum_0^{\lambda-1}{}^\varkappa\,|x_\nu|^{\varkappa-p-1}\,|x_{\nu-1}|^{-\varkappa-1}$$

$$\leqq |x_\nu - x_{\nu-1}|\,\lambda\,\varrho^{-(p+2)},$$

also:

$$\sum_1^p{}^\lambda\,|x_\nu|^{-(p+1)}\cdot|x_{\nu-1}|^{-\lambda}\cdot\left|x_\nu^\lambda - x_{\nu-1}^\lambda\right| \leqq \tfrac{1}{2}\,p(p+1)\,\varrho^{-(p+2)}\,|x_\nu - x_{\nu-1}|$$

und:

$$(10)\quad \begin{cases} \sum_1^n{}^{\nu} |x_\nu - x_{\nu-1}| \sum_1^p{}^{\lambda} |x_\nu|^{-(p+1)} |x_{\nu-1}|^{-\lambda} |x_\nu^\lambda - x_{\nu-1}^\lambda| \\ \qquad \leqq \tfrac{1}{2} p(p+1)\, \varrho^{-(p+2)} \sum_1^n{}^{\nu} |x_\nu - x_{\nu-1}|^2. \end{cases}$$

Wird jetzt wieder n groß genug angenommen, daß durchweg $|x_\nu - x_{\nu-1}| < \delta$ ausfällt, so geht die Ungleichung (9) mit Benützung von (10) und (3) in die folgende über:

$$\left| p \sum_1^n{}^{\nu} (x_\nu - x_{\nu-1}) x_\nu^{-(p+1)} + (X^{-p} - x_0^{-p}) \right| < \delta \cdot \tfrac{1}{2} p(p+1)\, \varrho^{-(p+2)} L,$$

und man findet somit:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_1^n{}^{\nu} (x_\nu - x_{\nu-1})\, x_\nu^{-(p+1)} = -\frac{1}{p} (X^{-p} - x_0^{-p}) \quad (p \geqq 1),$$

oder, wenn man schließlich noch p mit $p-1$ vertauscht:

$$(11)\quad \lim_{n\to\infty} \sum_1^n{}^{\nu} (x_\nu - x_{\nu-1})\, x_\nu^{-p} = \frac{1}{-p+1} (X^{-p+1} - x_0^{-p+1}) \quad (p \geqq 2).$$

Durch Zusammenfassung von Gleichung (8) und (11) ergibt sich, wenn man noch p bzw. $-p$ durch m ersetzt, das oben als Formel (I) ausgesprochene Resultat.

3. Wir *definieren* jetzt das (bestimmte) *Integral* einer Potenz x^m ($m = 0, 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$) erstreckt über einen *beliebigen* von x_0 bis X verlaufenden, *stetigen und rektifizierbaren Integrationsweg* (der nur im Falle $m < 0$ in endlicher Entfernung von der Stelle $x = 0$ verlaufen muß) durch den zuvor näher erklärten Grenzwert:

$$(\text{II a})\quad \int_{x_0}^{X} x^m\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_1^n{}^{\nu} (x_\nu - x_{\nu-1})\, x_\nu^m \qquad (\text{wo: } x_n \equiv X).$$

Infolge von Satz (I) der vorigen Nummer besteht dann die Beziehung[1]):

---

[1]) Dieses Ergebnis, d. h. die direkte Wertbestimmung des Integrals $\int_{x_0}^{X} x^m\, dx$ vermittelst des definierenden Grenzwertes $\lim_{n\to\infty} \sum_1^n{}^{\nu} (x_\nu - x_{\nu-1})\, x_\nu^m$,

$$\text{(II b)} \qquad \int_{x_0}^{X} x^m \, dx = \frac{1}{m+1} (X^{m+1} - x_0^{m+1}).$$

Das fragliche Integral ist also vom *Integrationswege* völlig *unabhängig*, sein Wert hängt (nach Art eines *reellen* Integrals) lediglich von den Grenzen x_0 und X ab.

Ist der Weg ein *geschlossener*, also $X = x_0$, so hat das Integral allemal den Wert *Null*.

§ 2. Das bestimmte Integral eines Polynoms und einer konvergierenden Potenzreihe.

1. Es sei $f(x)$ eine längs eines stetigen rektifizierbaren Weges $(x_0 \ldots X)$ eindeutige und *stetige* Funktion. Alsdann *definieren* wir das über diesen Weg erstreckte Integral von $f(x)$ durch die Formel:

---

scheint mir bei Beschränkung auf *reelle* x auch für die gewöhnliche Integralrechnung von Nutzen zu sein. Ohne Zweifel besteht doch in diesem Zusammenhange das didaktische Bedürfnis, die Möglichkeit der Berechnung eines bestimmten Integrals als Grenzwert einer Summe an irgendwelchen Beispielen evident zu machen. In der Tat dürfte es kaum ein größeres, den fraglichen Gegenstand behandelndes Lehrbuch geben, welches diesem Bedürfnis nicht Rechnung zu tragen sucht. Dies geschieht nun in *allen* mir bekannten Lehrbüchern (und ich habe eine sehr große Anzahl daraufhin kontrolliert!) stets in der Weise, daß zunächst die *Existenz* des Grenzwertes bei *beliebiger* Wahl der Teilung erwiesen und sodann die *Auswertung* an die Benützung einer *speziellen* Teilung geknüpft wird — z. B. bei der Berechnung von $\int_{x_0}^{X} e^x \, dx$ an eine Teilung in *gleiche* Intervalle, bei der Berechnung von $\int_{x_0}^{X} x^m \, dx$ (nach dem Vorgange von Dirichlet) an eine solche, bei der die Zwischenwerte x_ν eine *geometrische Progression* bilden, während doch die unmittelbare Auswertung des allgemeineren, auf einer *beliebigen* Teilung beruhenden Grenzwertes dem fraglichen Zwecke in noch prägnanterer Weise dienen würde. Gerade aus diesem Umstande glaubte ich mit ziemlicher Sicherheit schließen zu dürfen, daß die hier mitgeteilte Methode, so naheliegend sie erscheinen mag, bisher nicht bemerkt worden ist.

$$\text{(III)} \qquad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{1}^{n} {}_{\nu} (x_\nu - x_{\nu-1})\, f(x_\nu) \qquad (x_n \equiv X),$$

sofern dieser (im Sinne des vorigen Paragraphen zu bildende) *Grenzwert existiert.* Daß dies allemal wirklich der Fall ist, läßt sich ohne besondere Schwierigkeit nachweisen[1]), wird aber hier nicht benützt. Wir können nämlich in dem vorliegenden Zusammenhange uns damit begnügen, *für den Fall, daß jener Grenzwert existiert*, daraus die nachstehenden Folgerungen zu ziehen:

1) Es ist stets:

$$\text{(III a)} \qquad \left| \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx \right| \leqq M \cdot L,$$

wenn M das Maximum von $|f(x)|$ längs des Integrationsweges bedeutet und, wie früher (§ 1, Ungl. (3)): $\sum_{1}^{n} {}_{\nu} |x_\nu - x_{\nu-1}| < L$.

2) Gleichzeitig mit (III) besteht auch die Beziehung:

$$\text{(III b)} \qquad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{1}^{n} {}_{\nu} (x_\nu - x_{\nu-1})\, f(x_{\nu-1}).$$

Dies folgt unmittelbar aus dem Umstande, daß $f(x)$ längs des Weges $(x_0 \ldots X)$ *gleichmäßig* stetig sein muß und daher durchweg $|f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})| < \varepsilon$ wird, sofern nur $|x_\nu - x_{\nu-1}| < \delta$, also für alle n oberhalb einer passend fixierten Schranke.

3) Durch gleichzeitige Benützung von (III) und (III b) ergibt sich:

$$\text{(III c)} \qquad \int_{X}^{x_0} f(x)\,dx = -\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx.$$

---

[1]) Beweis s. bei C. Jordan, a. a. O., Nr. 193. Von der dort gemachten Voraussetzung, daß die betreffende Funktion *synektisch* (= im komplexen Sinne differenzierbar) sei, wird für den Beweis nur die *Stetigkeit* benützt.

4) Es ist:

$$\text{(III d)} \qquad \int_{x_0}^{X} c \cdot f(x)\, dx = c \cdot \int_{x_0}^{X} f(x)\, dx \qquad (c \text{ eine Konstante}).$$

5) Es ist:

$$\text{(III e)} \qquad \int_{x_0}^{X} f_1(x)\, dx + \int_{x_0}^{X} f_2(x)\, dx = \int_{x_0}^{X} (f_1(x) + f_2(x))\, dx,$$

und umgekehrt kann die *linke* Seite dieser Gleichung zur *Definition* der *rechten* dienen. (Analog für eine beliebige Anzahl von Summanden.)

6) Bedeutet x' irgend einen auf dem Wege $(x_0 \ldots X)$ gelegenen Punkt, so hat man:

$$\text{(III f)} \qquad \int_{x_0}^{x'} f(x)\, dx + \int_{x'}^{X} f(x)\, dx = \int_{x_0}^{X} f(x)\, dx,$$

und umgekehrt kann die *linke* Seite dieser Gleichung zur *Definition* der *rechten* verwendet werden. (Analog für eine beliebige Anzahl von Zwischenpunkten.)

7) Ist der Integrationsweg ein *geschlossener*, also etwa bei x_0 beginnender und wieder endigender, so ergibt sich mit Benützung von 6), daß der Integralwert ungeändert bleibt, wenn ein beliebiger anderer Punkt zum Anfangs- und Endpunkt der Integration genommen wird.

2. Es sei wieder m eine *ganze* Zahl mit Ausschluß von -1, außerdem sei a eine beliebige komplexe Zahl, die nur im Falle $m < 0$ nicht dem Wege $(x_0 \ldots X)$ angehören darf. Alsdann hat man nach Definitionsgleichung (III) zunächst:

$$\text{(IV a)} \int_{x_0}^{X} (x-a)^m\, dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{1}^{n} {}_{\nu} (x_\nu - x_{\nu-1})\, (x_\nu - a)^m \qquad (x_n \equiv X),$$

sofern dieser Grenzwert für den Integrationsweg $(x_0 \ldots X)$ existiert. Daß dies aber der Fall ist, ergibt sich, wenn etwa gesetzt wird:

$$x_\nu - a = x'_\nu \,(\nu = 0, 1, \ldots n), \quad X - a = X',$$

also:

$$\sum_1^n{}^{\nu} (x_\nu - x_{\nu-1})\,(x_\nu - a)^m = \sum_1^n{}^{\nu} (x'_\nu - x'_{\nu-1})\, x_\nu'^m \qquad (x'_n \equiv X'),$$

unmittelbar aus § 1, und zwar findet man mit Benützung der Formel (I):

$$\text{(IV b)} \quad \left\{ \int_{x_0}^{X} (x-a)^m\, dx = \frac{1}{m+1}\,((X-a)^{m+1} - (x_0-a)^{m+1}) \right.$$
$$\left. (m = 0, 1, \pm 2, \pm 3, \ldots). \right.$$

Wird jetzt ferner $m > 0$ angenommen und setzt man:

$$\text{(1)} \quad g_m(x-a) = c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_m (x-a)^m,$$

so gilt nach Formel (III e) und (III d) die Definitionsgleichung:

$$\text{(V a)} \quad \left\{ \int_{x_0}^{X} g_m(x-a)\, dx = c_0 \int_{x_0}^{X} dx + c_1 \int_{x_0}^{X} (x-a)\, dx + \cdots \right.$$
$$\left. + c_m \int_{x_0}^{X} (x-a)^m\, dx \right.$$

und man findet mit Benützung von (IV b):

$$\text{(V b)} \quad \left\{ \int_{x_0}^{X} g_m(x-a)\, dx = c_0\,((X-a) - (x_0-a)) \right.$$
$$+ \frac{c_1}{2}\,((X-a)^2 - (x_0-a)^2) + \cdots$$
$$+ \frac{c_m}{m+1}\,((X-a)^{m+1} - (x_0-a)^{m+1})$$
$$\left. = g^*_{m+1}(X-a) - g^*_{m+1}(x_0-a), \right.$$

wenn gesetzt wird:

$$\text{(2)} \quad g^*_{m+1}(x-a) = c_0(x-a) + \frac{c_1}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{c_{m+1}}{m+1}(x-a)^{m+1},$$

so daß also:

$$\text{(3)} \qquad g_m(x-a) = D\, g^*_{m+1}(x-a).$$

Analoge Beziehungen gelten offenbar für ein nach *negativen* Potenzen $(x-a)^{-\nu}$ (wo $\nu \geqq 2$) fortschreitendes Polynom, etwa:

$$(4) \quad g_m\left(\frac{1}{x-a}\right) = c_2(x-a)^{-2} + \cdots + c_m(x-a)^{-m}.$$

Man findet insbesondere:

$$(\text{VI}) \quad \int_{x_0}^{x} g_m\left(\frac{1}{x-a}\right) dx = g_{m-1}^{*}\left(\frac{1}{X-a}\right) - g_{m-1}^{*}\left(\frac{1}{x_0-a}\right),$$

wenn gesetzt wird:

$$(5) \quad g_{m-1}^{*}\left(\frac{1}{x-a}\right) = -\frac{c_2}{1}(x-a)^{-1} - \frac{c_3}{2}(x-a)^{-2} - \cdots - \frac{c_m}{m-1}(x-a)^{-(m-1)},$$

so daß also:

$$(6) \quad g_m\left(\frac{1}{x-a}\right) = D\, g_{m-1}^{*}\left(\frac{1}{x-a}\right).$$

3. Bedeutet jetzt $\mathfrak{P}(x-a)$ eine konvergente Potenzreihe, etwa:

$$(7) \quad \mathfrak{P}(x-a) = \sum_{0}^{\infty \varkappa} c_\varkappa (x-a)^\varkappa$$

und ist $(x_0 \ldots X)$ ein ganz *im Innern* ihres Konvergenzbereiches verlaufender (stetiger und rektifizierbarer) Weg, so besteht nach Formel (III) zunächst die Definitionsgleichung:

$$(\text{VII a}) \quad \int_{x_0}^{X} \mathfrak{P}(x-a)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{1}^{n\nu} (x_\nu - x_{\nu-1})\, \mathfrak{P}(x_\nu - a) \quad (x_n \equiv X).$$

Wir wollen zeigen, daß nach Analogie von Gl. (V b) die Beziehung besteht:

$$(\text{VII b}) \quad \int_{x_0}^{X} \mathfrak{P}(x-a)\, dx = \mathfrak{P}^*(X-a) - \mathfrak{P}^*(x_0-a),$$

wenn gesetzt wird:

$$\mathfrak{P}^*(x-a) = \sum_0^\infty{}^{\varkappa} \frac{c_\varkappa}{\varkappa+1}(x-a)^{\varkappa+1}, \tag{8}$$

also:

$$\mathfrak{P}(x-a) = D\,\mathfrak{P}^*(x-a). \tag{9}$$

Wir setzen nun die beiden vorliegenden Potenzreihen in die Form:

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}(x-a) &= \sum_0^m{}^{\varkappa} c_\varkappa (x-a)^\varkappa + \sum_{m+1}^\infty{}^{\varkappa} c^\varkappa (x-a)^\varkappa \\ &= g_m(x-a) + R_m(x-a),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}^*(x-a) &= \sum_0^m{}^{\varkappa} \frac{c_\varkappa}{\varkappa+1}(x-a)^{\varkappa+1} + \sum_{m+1}^\infty{}^{\varkappa} \frac{c_\varkappa}{\varkappa+1}(x-a)^{\varkappa+1} \\ &= g^*_{m+1}(x-a) + R^*_{m+1}(x-a).\end{aligned}$$

Man hat sodann:

$$\begin{aligned}\sum_1^n{}^{\nu}(x_\nu - x_{\nu-1})\,\mathfrak{P}(x_\nu - a) &= \sum_1^n{}^{\nu}(x_\nu - x_{\nu-1})\,g_m(x_\nu - a) \\ &\quad + \sum_1^n{}^{\nu}(x_\nu - x_{\nu-1})\,R_m(x_\nu - a)\end{aligned}$$

und andererseits:

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}^*(X-a) - \mathfrak{P}^*(x_0-a) &= (g^*_{m+1}(X-a) - g^*_{m+1}(x_0-a)) \\ &\quad + R^*_{m+1}(X-a) - R^*_{m+1}(x_0-a).\end{aligned}$$

Hieraus durch Subtraktion und Übergang zum absoluten Betrage:

$$\begin{aligned}&\left|\sum_1^n{}^{\nu}(x_\nu - x_{\nu-1})\,\mathfrak{P}(x_\nu - a) - (\mathfrak{P}^*(X-a) - \mathfrak{P}^*(x_0-a))\right| \\ &\leqq \left|\sum_1^n{}^{\nu}(x_\nu - x_{\nu-1})g_m(x_\nu - a) - (g^*_{m+1}(X-a) - g^*_{m+1}(x_0-a))\right| \\ &\quad + \left|\sum_1^n{}^{\nu}(x_\nu - x_{\nu-1})R_m(x_\nu - a)\right| + |R^*_{m+1}(X-a)| + |R^*_{m+1}(x_0-a)|.\end{aligned} \tag{10}$$

Infolge der gleichmäßigen Konvergenz der beiden Potenzreihen läßt sich zunächst m so fixieren, daß für jedes in Betracht kommende x:

$$|R_m(x-a)| < \varepsilon, \quad |R^*_{m+1}(x-a)| < \varepsilon,$$

und daher (mit Berücksichtigung von: $\sum_1^n{}^{\nu} |x_\nu - x_{\nu-1}| < L$) die Summe der drei letzten Glieder von Ungleichung (10) *kleiner als* $(L+2)\,\varepsilon$ ausfällt.

Hierauf kann man mit Rücksicht auf Formel (III) und (V b) ein N so auswählen, daß für $n \geq N$:

$$\left| \sum_1^n{}^{\nu} (x_\nu - x_{\nu-1}) g_m(x_\nu - a) - (g_{m+1}^*(X-a) - g_{m+1}^*(x_0 - a)) \right| < \varepsilon,$$

so daß die Ungleichung (10) in die folgende übergeht:

$$\left| \sum_1^n{}^{\nu} (x_\nu - x_{\nu-1}) \mathfrak{P}(x_\nu - a) - (\mathfrak{P}^*(X-a) - \mathfrak{P}^*(x_0 - a)) \right| < (L+3)\,\varepsilon$$

und schließlich ergibt sich:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_1^n{}^{\nu} (x_\nu - x_{\nu-1}) \mathfrak{P}(x_\nu - a) = \mathfrak{P}^*(X-a) - \mathfrak{P}^*(x_0 - a),$$

womit die fragliche Behauptung (VII b) bewiesen ist. Ihr Inhalt kann offenbar auch durch die Formel ausgedrückt werden:

$$\text{(VII c)} \qquad \int_{x_0}^{X} \left(\sum_0^\infty{}^{\varkappa} c_\varkappa (x-a)^\varkappa \right) dx = \sum_0^\infty{}^{\varkappa} c_\varkappa \int_{x_0}^{X} (x-a)^\varkappa \, dx$$

mit Hinzunahme der Integralformel (IV b), d. h. schließlich des Fundamentalsatzes (I).

Im übrigen enthält Gleichung (VII b) die Aussage, daß das Integral von $\mathfrak{P}(x-a)$ längs eines *im Innern* ihres Konvergenzbereiches verlaufenden (stetigen und rektifizierbaren)[1]) Weges $(x_0 \ldots X)$ nur von dessen *Endpunkten* abhängt, also

[1]) Unsere Beweismethode trägt also etwas weiter, als diejenige, welche Herr Kowalewski in seinem Lehrbuch „Die komplexen Veränderlichen und ihre Funktionen (1911)" bei seinen sehr ausführlichen und exakten Untersuchungen über die vorliegende Frage angewendet hat. Dort muß zu den Voraussetzungen der *Stetigkeit* und *Rektifizierbarkeit* noch die weitere hinzukommen, daß der Quotient *„Bogen durch Sehne"*, wenn die letztere gegen Null konvergiert, stets *unter einer endlichen Schranke* bleibt (a. a. O. S. 158). An einem sehr einfachen und lehrreichen Beispiel wird ausdrücklich gezeigt, daß es stetige rektifizierbare Wege gibt, welche diese Eigenschaft *nicht* besitzen.

bis auf diese beiden *vom Wege unabhängig* ist. *Ist der Weg ein geschlossener, also* $X = x_0$, *so hat das Integral den Wert Null.*

Schließlich findet man noch, wenn man mit x einen beliebig veränderlichen Innenpunkt des Konvergenzbereiches bezeichnet und zum Unterschiede für den Integrationsbuchstaben x ein anderes Zeichen, etwa z benutzt, nach Gleichung (VII b):

$$(11) \qquad \int_{x_0}^{x} \mathfrak{P}(z-a)\,dz = \mathfrak{P}^*(x-a) - \mathfrak{P}^*(x_0-a)$$

für jeden im Innern des Konvergenzbereiches verlaufenden Integrationsweg, also mit Benützung von Gleichung (9):

$$(12) \qquad \int_{x_0}^{x} d\,\mathfrak{P}^*(z-a) = \mathfrak{P}^*(x-a) - \mathfrak{P}^*(x_0-a)$$

(wobei es offenbar freisteht, $\mathfrak{P}^*(x-a)$ durch $\mathfrak{P}^*(x-a) + konst.$ zu ersetzen: Zusammenhang zwischen dem unbestimmten und dem bestimmten Integral) und:

$$(13) \qquad \frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} \mathfrak{P}(z-a)\,dz = D\,\mathfrak{P}^*(x-a) = \mathfrak{P}(x-a)$$

(das Integral als eindeutige differenzierbare Funktion seiner oberen Grenze). Analoge Beziehungen gelten mit Berücksichtigung von Gleichung (VI) auch für eine Reihe, die nach *negativen* Potenzen von $x-a$ mit Ausschluß von $(x-a)^{-1}$ fortschreitet. Insbesondere findet man für jeden im Innern des Konvergenzbereiches verlaufenden Weg $x_0 \ldots X$:

$$(VIII) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{x_0}^{X} \left(\sum_2^\infty{}^{\varkappa} c_\varkappa (x-a)^{-\varkappa}\right) dx = \sum_2^\infty{}^{\varkappa} c_\varkappa \int_{x_0}^{X} (x-a)^{-\varkappa}\,dx \\ \qquad = -\left(\displaystyle\sum_1^\infty{}^{\varkappa} \frac{c_{\varkappa+1}}{\varkappa}(X-a)^{-\varkappa} - \sum_1^\infty{}^{\varkappa} \frac{c_{\varkappa+1}}{\varkappa}(x_0-a)^{-\varkappa}\right) \end{cases}$$

und das betreffende Integral hat wiederum den Wert *Null*, wenn der Weg ein *geschlossener* ist (gleichgültig, ob er die Stelle a, also schließlich das ganze Divergenzgebiet der Reihe umschließt oder nicht).

§ 3. Das bestimmte Integral einer regulären analytischen Funktion. Der Cauchysche Integralsatz.

1. Es seien $\mathfrak{P}(x-a)$, $\mathfrak{P}_1(x-a_1)$ zwei Potenzreihen mit teilweise zusammenfallenden Konvergenzkreisen und es bestehe in dem gemeinsamen Stücke B ihrer Konvergenzbereiche die Beziehung:

$$\mathfrak{P}(x-a) = \mathfrak{P}_1(x-a_1),$$

so definieren die beiden Potenzreihen zusammen eine im Innern des aus beiden Konvergenzkreisen bestehenden Bereiches A analytische Funktion regulären Verhaltens $f(x)$. Dann läßt sich zunächst zeigen, daß $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ für jeden einzelnen im Innern von (A) verlaufenden Weg $x_0 \ldots X$ einen bestimmten Wert besitzt, auch wenn der Weg sich über die *beiden* Teilbereiche erstreckt, in denen nur je *eine* der beiden Potenzreihen konvergiert. Dabei genügt es offenbar den Fall zu betrachten, daß x_0 dem einen, X dem anderen dieser Teilbereiche angehört und daß der verbindende Weg $x_0 \ldots X$ den gemeinsamen Konvergenzbereich B *einmal* durchsetzt, da ja Wege zusammengesetzterer Art sich im allgemeinen[1]) in eine *endliche* Anzahl *solcher* bzw. ganz in einem *einzigen* Konvergenzkreise verlaufender Wege zerlegen lassen. Bedeutet dann b irgend einen auf $x_0 \ldots X$ gelegenen, dem Innern von B angehörigen Punkt, so hat man nach Nr. 1 des vorigen Paragraphen, Gleichung (III f):

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{b} f(x)\,dx + \int_{b}^{X} f(x)\,dx,$$

und da auf Grund der Definitionsgleichung (III) des vorigen

[1]) Der allerdings denkbare Fall, daß ein Wegstück eine der beiden Grenzlinien von B unendlich oft durchsetzt, bietet keine Schwierigkeit, da ja *eine* der beiden Potenzreihen längs dieses ganzen Wegstückes konvergieren muß.

Paragraphen der Wert des Integrals $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ nur von den Zahlenwerten der Funktion $f(x)$, nicht aber von deren besonderer Darstellungsform abhängt, so kann man setzen:

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{b} \mathfrak{P}(x-a)\,dx + \int_{b}^{X} \mathfrak{P}_1(x-a_1)\,dx,$$

das fragliche Integral hat also einen bestimmten Wert.[1]) Durch Fortsetzung dieser Schlußweise ergibt sich folgendes: Ist längs irgend eines stetigen und rektifizierbaren Weges $x_0 \ldots X$ eine analytische Funktion regulären Verhaltens $f(x)$ durch ein System von Potenzreihen $\mathfrak{P}_\mu(x-a_\mu)$ mit ineinander greifenden Konvergenzkreisen definiert, so hat das über diesen Weg erstreckte Integral $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ einen bestimmten, durch eine Summe von Integralen der Form $\int_{b_\mu}^{b_\mu+1} \mathfrak{P}_\mu(x-a_\mu)\,dx$ darstellbaren Wert.

2. Nun sei $f(x)$ *regulär* zum mindesten für alle Innenpunkte eines gewissen Bereiches B und es bedeute B' einen zusammenhängenden, von einer oder mehreren stetigen und rektifizierbaren Randkurven begrenzten Bereich, der nur aus Innenpunkten von B besteht. Wird dann mit (B') die gesamte Begrenzung von B' und mit $\int_{+(B')} f(x)\,dx$ das Integral über den

---

[1]) Daß dieser Wert nicht etwa von der Wahl des Punktes b abhängt, ersieht man, wenn b' einen anderen in (B) gelegenen Punkt des Weges $x_0 \ldots X$ bedeutet, aus der Beziehung:

$$\int_{b}^{b'} f(x)\,dx \begin{cases} = \int_{b}^{b'} \mathfrak{P}(x-a)\,dx \\ = \int_{b}^{b'} \mathfrak{P}_1(x-a_1)\,dx. \end{cases}$$

Weg B' in einem bestimmten Richtungssinne, dem sogenannten positiven, bezeichnet, so soll gezeigt werden, daß:

$$(1) \qquad \int_{+(B')} f(x)\, dx = 0.$$

Beweis. Da $f(x)$ im Innern und auf der Begrenzung von B' regulär ist, so existiert für jede Stelle x' von B' eine Umgebung $|x - x'| < r'$, innerhalb deren eine Entwickelung von der Form $f(x) = \sum_0^\infty{}^{\varkappa} c_\varkappa (x - x')^\varkappa$ besteht. Dabei besitzen nach einem bekannten Satze die positiven Zahlen r' ein von Null verschiedenes Minimum, das mit ϱ bezeichnet werden möge. Zerlegt man nun den Bereich B' durch horizontale und vertikale Gerade im Abstande $\sqrt{\frac{1}{2}}\,\varrho$ in eine endliche Anzahl von Teilbereichen (Quadraten und Bruchstücken von Quadraten) B_λ, so ist die *größte* Entfernung zweier Punkte, von denen einer *im Innern*, der andere *auf der Grenze* eines solchen Teilbereiches B_λ liegt, *kleiner* als die Diagonale eines Quadrats mit der Seite $\sqrt{\frac{1}{2}}\,\varrho$, d. h. *kleiner als* ϱ. Wird also ein Punkt x_λ ganz beliebig *im Innern* von B_λ angenommen, so liegt die *gesamte Begrenzung* von B_λ noch *innerhalb* des Konvergenzbereiches einer Entwickelung von der Form

$$f(x) = \sum_0^\infty{}^{\varkappa} c_\varkappa^{(\lambda)} (x - x_\lambda)^\varkappa.$$

Infolgedessen ergibt sich nach Nr. 3 des vorigen Paragraphen, daß für jedes λ:

$$(2) \qquad \int_{+(B_\lambda)} f(x) \cdot dx = 0.$$

Ferner besteht für $f(x)$ insbesondere längs der Begrenzung von B' ein System in einander greifender Potenzreihen-Entwickelungen, und es besitzt daher das Integral von $f(x)$ erstreckt über die Begrenzung (B'), etwa in positivem Richtungssinne, nach Nr. 1 *einen bestimmten Wert.* Andererseits ist aber dieses Integral gleich der *Summe* aller über die ein-

zelnen (B_λ) in entsprechendem Sinne erstreckten Integrale, da ja bei der Addition dieser letzteren alle von den (zweimal in entgegengesetzter Richtung zu durchlaufenden) Hilfsgeraden herrührenden Bestandteile sich herausheben. Somit ergibt sich mit Berücksichtigung von Gleichung (2) die Richtigkeit der oben ausgesprochenen Behauptung (1).

3. Im vorstehenden ist also der *Cauchysche Integralsatz* bewiesen für die lediglich als *stetig und rektifizierbar* vorausgesetzte Begrenzung eines zusammenhängenden Bereiches B unter der Voraussetzung, daß die zu integrierende Funktion $f(x)$ sich im Innern und auf der Begrenzung *regulär* verhält. Da aber andererseits ohne Benützung der komplexen Integration, nämlich mit Hilfe der wesentlich einfacher gearteten *Mittelwerte* gezeigt werden kann[1]), daß jede in irgend einem Bereich B *eindeutige* und *stetig-differenzierbare* (d. h. mit einem stetigen Differentialquotienten $f'(x)$ versehene, nach der Cauchyschen Terminologie *synektische*) Funktion $f(x)$ daselbst *regulären Verhaltens* ist, so ist damit der fragliche Satz in dem bezeichneten Umfange zugleich für solche *stetig-differenzierbare* Funktionen bewiesen, d. h. in genau demselben Umfange, wie ihn der Beweis von C. Jordan[2]) gibt, der ja bis zum Erscheinen des Goursatschen Beweises mit dem „Lemma“[3]) als der am weitesten reichende zu gelten hatte.

4. Will man schließlich dem Cauchyschen Integralsatze (immer bei Zulassung von Integrationswegen, die lediglich *stetig* und *rektifizierbar* zu sein brauchen) bezüglich der Voraussetzungen über $f(x)$ denjenigen Grad von Allgemeinheit geben, wie der (übrigens auf eine *speziellere* Gattung von *Integrationswegen* sich beschränkende) Goursatsche Beweis ihn besitzt, d. h. fordert man für $f(x)$ lediglich die *Existenz* eines für jedes einzelne x *endlichen* Differentialquotienten $f'(x)$, *nicht*

[1]) s. Math. Ann. 47 (1896), S. 147 und besonders diese Berichte, Bd. 26 (1896), S. 167 ff.

[2]) Cours d'Analyse 1 (1893), No. 193—198.

[3]) Amer. Math. Soc. Transact. 1 (1900), S. 14. Vgl. auch 2 (1901), S. 413.

aber dessen *Stetigkeit*, so läßt sich dies sehr einfach in folgender Weise bewerkstelligen. Man braucht dazu die Beziehung $\int f(x)\,dx = 0$ nur für den Fall zu beweisen, daß die Integration sich über den Umfang eines *Dreiecks* erstreckt[1]), woraus dann unmittelbar die Gültigkeit der analogen Beziehung für den Umfang eines *Polygons* resultiert. Wird dann in irgend einem einfach zusammenhängenden Bereiche, in welchem $f(x)$ differenzierbar ist, ein beliebiger Punkt x_0 fest angenommen, so ist für jedes dem Bereiche angehörige x bei Zulassung beliebiger *polygonaler* Integrationswege $F(x) \equiv \int_{x_0}^{x} f(z)\,dz$ vom Wege *unabhängig*, also eine *eindeutige* Funktion von x. Man hat sodann:

$$F(x+h) - F(x) = \int_{x}^{x+h} f(z)\,dz = \int_{x}^{x+h} (f(z) - f(x))\,dz + f(x)\cdot h,$$

(wo bei hinlänglich kleinem $|h|$ die Integration von x bis $x+h$ *geradlinig* vollzogen werden kann) und daher:

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| \leq \frac{1}{|h|}\int_{x}^{x+h} |f(z) - f(x)|\,|dz|$$

$$< \frac{\varepsilon}{|h|}\int_{x}^{x+h} |dz| = \varepsilon,$$

wenn eine obere Schranke δ für $|h|$ so bestimmt wird, daß:

$$|f(z) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{für:} \quad |z - x| \leqq |h| < \delta,$$

was wegen der (aus der Differenzierbarkeit folgenden) *Stetigkeit* von $f(x)$ allemal möglich ist. Man findet also:

$$\left|\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| = 0$$

---

[1]) Eine sehr einfache und kurze Fassung dieses Beweises habe ich in Bd. 33 (1903) dieser Berichte S. 681 angegeben.

und zwar *gleichmäßig* für alle h, wenn $x + h$ *geradlinig* nach x konvergiert.

Mithin ist $F(x)$ in allen (geradlinigen) Richtungen *gleichmäßig* differenzierbar, also *schlechthin* differenzierbar und schließlich, wegen:

$$F'(x) = f(x),$$

stetig differenzierbar, also nach dem oben gesagten *regulär*. Gleichzeitig mit $F(x)$ ist aber auch $F'(x)$, d. h. $f(x)$ *regulär*, und es gilt also für die zunächst nur als *eindeutig* und *differenzierbar* vorausgesetzte Funktion $f(x)$ der Cauchysche Integralsatz in dem oben für *reguläre* Funktionen festgestellten Umfange.

§ 4. Das Integral von x^{-1} für einen geschlossenen Weg um den Nullpunkt. — Der Cauchysche Randintegral- und Residuensatz.

1. Aus dem Cauchyschen Integralsatze folgt in entsprechendem Umfange und nach bekannten Methoden die Unabhängigkeit des Integrals $\int_{x_0}^{x} f(z)\,dz$ vom Integrationswege, die Differenzierbarkeit nach der oberen Grenze und der Zusammenhang mit dem unbestimmten Integral. Hierauf braucht also nicht weiter eingegangen zu werden. Dagegen bleibt noch eine Frage offen, die sich auf das Integral von x^{-1} bezieht. Da x^{-1}, abgesehen von der Stelle $x = 0$, sich *regulär* verhält, so *existiert* $\int_{x_0}^{x} f(z)\,dz$ für jeden die Stelle $x = 0$ vermeidenden Integrationsweg und *verschwindet*, falls der letztere ein *geschlossener* ist und die Stelle $x = 0$ auch nicht *im Innern* enthält. Es bleibt also nur das Integral $\int x^{-1}\,dx$ für einen die Stelle $x = 0$ umlaufenden geschlossenen Weg auszuwerten, wobei es auf Grund des Cauchyschen Integralsatzes freisteht, jeden (in dem angegebenen Umfange) *beliebigen* Weg durch einen nach Bedarf gewählten *speziellen* zu ersetzen. Wir wählen, um die Berechnung ohne die Benützung der üblichen Trans-

formationsmethoden der Integralrechnung durchzuführen, als Integrationsweg das Quadrat mit den Eckpunkten:

$$1 - i, \quad 1 + i, \quad -1 + i, \quad -1 - i.$$

Man hat also, wenn mit $+(Q)$ den in positiver Integrationsrichtung zu durchlaufenden Umfang des betreffenden Quadrats bezeichnet:

$$(1) \qquad \int_{+(Q)} \frac{dx}{x} = \int_{1-i}^{1+i} \frac{dx}{x} + \int_{1+i}^{-1+i} \frac{dx}{x} + \int_{-1+i}^{-1-i} \frac{dx}{x} + \int_{-1-i}^{1-i} \frac{dx}{x}.$$

Das erste der rechts stehenden Integrale zerlegen wir folgendermaßen:

$$\int_{1-i}^{1+i} \frac{dx}{x} = \int_{1}^{1+i} \frac{dx}{x} - \int_{1}^{1-i} \frac{dx}{x}$$

und, da die Existenz dieser Integrale bereits feststeht und es demgemäß ausreicht, die betreffenden Grenzwerte mit Hilfe einer Teilung in *gleiche* Intervalle zu berechnen, so findet man:

$$\int_{1}^{1+i} \frac{dx}{x} = i \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n_\nu} \frac{1}{1 + \frac{\nu}{n} i} \qquad \left(\text{für: } x_\nu = 1 + \frac{\nu}{n} i\right)$$

$$\int_{1}^{1-i} \frac{dx}{x} = -i \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n_\nu} \frac{1}{1 - \frac{\nu}{n} i} \qquad \left(\text{für: } x_\nu = 1 - \frac{\nu}{n} i\right)$$

und daher:

$$(2) \qquad \int_{1-i}^{1+i} \frac{dx}{x} = 2i \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n_\nu} \frac{1}{1 + \left(\frac{\nu}{n}\right)^2}.$$

Für das zweite der in Gleichung (1) rechts stehenden Integrale hat man zunächst:

$$\int_{1+i}^{-1+i} \frac{dx}{x} = -\int_{i}^{1+i} \frac{dx}{x} + \int_{i}^{-1+i} \frac{dx}{x}$$

und sodann:

$$\int_{i}^{1+i} \frac{dx}{x} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n\nu} \frac{1}{i + \frac{\nu}{n}} \quad \left(\text{für: } x_\nu = i + \frac{\nu}{n}\right),$$

$$\int_{i}^{-1+i} \frac{dx}{x} = -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n\nu} \frac{1}{i - \frac{\nu}{n}} \quad \left(\text{für: } x_\nu = i - \frac{\nu}{n}\right),$$

also:

$$\int_{1+i}^{-1+i} \frac{dx}{x} = 2i \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n\nu} \frac{1}{1 + \left(\frac{\nu}{n}\right)^2}. \tag{3}$$

In ganz analoger Weise ergibt sich, daß auch:

$$\begin{aligned} \int_{-1+i}^{-1-i} \frac{dx}{x} &= 2i \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n\nu} \frac{1}{1 + \left(\frac{\nu}{n}\right)^2}, \\ \int_{-1-i}^{1-i} \frac{dx}{x} &= 2i \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n\nu} \frac{1}{1 + \left(\frac{\nu}{n}\right)^2}, \end{aligned} \tag{4}$$

mithin schließlich:

$$\int_{+(Q)} \frac{dx}{x} = 8i \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n\nu} \frac{1}{1 + \left(\frac{\nu}{n}\right)^2}. \tag{5}$$

Durch Entwickelung der rechts auftretenden Summe nach Potenzen von $\left(\frac{\nu}{n}\right)^2$ findet man:

$$\frac{1}{n} \sum_{1}^{n\nu} \frac{1}{1 + \left(\frac{\nu}{n}\right)^2} \begin{cases} > \frac{1}{n} \sum_{1}^{n\nu} \sum_{0}^{2k-1\lambda} (-1)^\lambda \left(\frac{\nu}{n}\right)^{2\lambda} = \sum_{0}^{k-1\lambda} (-1)^\lambda \sum_{1}^{n\nu} \frac{\nu^{2\lambda}}{n^{2\lambda+1}} \\ < \frac{1}{n} \sum_{1}^{n\nu} \sum_{0}^{2k\lambda} (-1)^\lambda \left(\frac{\nu}{n}\right)^{2\lambda} = \sum_{0}^{2k\lambda} (-1)^\lambda \sum_{1}^{n\nu} \frac{\nu^{2\lambda}}{n^{2\lambda+1}}. \end{cases} \tag{6}$$

Nun ist bekanntlich[1]):

$$\lim_{n\to\infty} \sum_1^n{}^{\nu} \frac{\nu^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1},$$

und daher wird für jedes k:

$$(7) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_1^n{}^{\nu} \frac{1}{1+\left(\frac{\nu}{n}\right)^2} \begin{cases} \geqq \sum_0^{2k-1}{}^{\lambda} (-1)^\lambda \cdot \dfrac{1}{2\lambda+1} \\ \leqq \sum_0^{2k}{}^{\lambda} (-1)^\lambda \cdot \dfrac{1}{2\lambda+1}, \end{cases}$$

also schließlich:

$$(8) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_1^n{}^{\nu} \frac{1}{1+\left(\frac{\nu}{n}\right)^2} = \sum_0^{\infty}{}^{\lambda} (-1)^\lambda \cdot \frac{1}{2\lambda+1},$$

d. h. gleich der Leibnizschen Reihe für $\frac{\pi}{4}$, so daß nach Gleichung (5) sich ergibt:

$$(9) \qquad \int_{+(Q)} \frac{dx}{x} = 2\pi i$$

und hieraus, wenn man mit (C) einen beliebigen den Nullpunkt umlaufenden geschlossenen Weg bezeichnet, etwas allgemeiner:

$$(9\,a) \qquad \int_{+(C)} \frac{dx}{x} = 2\pi i.$$

2. Durch Substitution von $x - a$ für x findet man, analog wie früher bei der Herleitung von $\int_{x_0}^{X} (x-a)^m\,dx$ aus $\int_{x_0}^{X} x^m\,dx$ (s. § 2, (Gl. IV a), S. 167), daß auch:

---

[1]) Die Formel ergibt sich am einfachsten mit Hilfe des verallgemeinerten Cauchyschen (Stolzschen) Grenzwertsatzes, nach welchem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{M_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{M_n - M_{n-1}},$$

falls der rechts stehende Grenzwert für $M_n > M_{n-1}$, $\lim_{n\to\infty} M_n = +\infty$, *existiert*.

$$\int_{+(C)} \frac{dx}{x-a} = 2\pi i, \tag{10}$$

falls der geschlossene Weg (C) die Stelle a im Innern enthält.

Ist nun $f(x)$ *regulär* im Innern und auf der Begrenzung eines Bereiches B von der Art, wie er beim Beweise des Cauchyschen Integralsatzes benützt wurde, und bezeichnet man mit x' jede beliebige Stelle *im Innern* von B, so ist auch $\frac{f(x)-f(x')}{x-x'}$ in demselben Umfange (insbesondere auch an der Stelle x') *regulär*, und man findet daher auf Grund des Cauchyschen Integralsatzes und Gl. (10):

$$0 = \int_{+(B)} \frac{f(x)-f(x')}{x-x'}\,dx = \int_{+(B)} \frac{f(x)}{x-x'}\,dx - 2\pi i f(x'),$$

also:

$$f(x') = \frac{1}{2\pi i}\int_{+(B)} \frac{f(x)}{x-x'}\,dx \tag{11}$$

(*Cauchyscher Randintegralsatz*).

Enthält der Bereich B im Innern die isolierte singuläre Stelle a und bezeichnet man mit (K) einen in B verlaufenden Kreis um a, so hat man zunächst:

$$\int_{+(B)} f(x)\,dx = \int_{+(K)} f(x)\,dx.$$

Da nun für die Umgebung von a auf Grund der Mittelwertmethode[1]) eine Laurentsche Entwickelung von der Form besteht:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_\varkappa (x-a)^\varkappa,$$

so findet man mit Benützung des in § 2 über die Integration von Reihen nach positiven bzw. negativen Potenzen gesagten, sowie von Gleichung (10):

$$\int_{+(B)} f(x)\,dx = 2\pi i\, c_{-1} \quad (\textit{Cauchyscher Residuensatz}).$$

[1]) Vgl. diese Berichte, Bd. 25 (1895), S. 85 oder Math. Ann. 47 (1896) S. 147.

Über den optischen Ausgleich in der Zeitlupe.

Von **Ludwig Burmester.**

Vorgetragen in der Sitzung am 6. März 1920.

Mit den gewöhnlichen kinematographischen Aufnahmeapparaten können wegen der ruckweisen Bewegungen des Films höchstens 20 Aufnahmen in der Sekunde ausgeführt werden, und deshalb sind sie bei schnellen Bewegungsvorgängen, die eine große Anzahl Aufnahmen in der Sekunde erfordern, nicht verwendbar. Der von Dr. H. Lehmann konstruierte und von der H. Ernemann A.-G. in Dresden hergestellte kinematographische Aufnahmeapparat mit stetiger Bewegung des Films vermittelst optischen Ausgleiches ermöglicht in der Sekunde bis 500 Aufnahmen schneller Bewegungsvorgänge, die bei der kinematographischen Vorführung verlangsamt in den einzelnen Phasen anschaulich erkennbar werden. Der früh verstorbene wissenschaftliche Mitarbeiter in dieser Firma, Lehmann hat die schematische Anordnung dieses Aufnahmeapparates mitgeteilt[1]). Er schreibt: „Wie das Fernrohr und das Mikroskop eine Erweiterung unseres Gesichtssinnes bedeutet, indem sie uns entfernte oder sehr kleine räumliche Elemente durch Vergrößerung bemerkbar machen, so bedeutet auch der neue kinematographische Apparat eine Erweiterung unseres Gesichtssinnes, indem er uns nämlich Bewegungsvorgänge erst bemerkbar

[1]) Photographische Korrespondenz, Juli 1916, S. 227. Ferner hat auch Dr. A. Klughardt über die Zeitlupe berichtet in der Zentralzeitung für Optik und Mechanik 1919, S. 199.

macht, die infolge ihrer sehr großen Bewegungsgeschwindigkeit unsere natürliche Wahrnehmungsfähigkeit übersteigen. Man kann daher mit gutem Rechte den neuen Apparat das »Zeitmikroskop« nennen". Dagegen hat Lehmann in dem mir gesandten Sonderabdruck von seiner Mitteilung anstatt Zeitmikroskop korrigierend die Benennung Zeitlupe gewählt, die auch von jener Firma angenommen wurde und nun üblich geworden ist. Vermutlich deshalb, weil er nur mäßig schnelle Bewegungsvorgänge bei 15- bis 20fach verlangsamter Wiedergabe: Sprung vom Hund und Pferd, auch Taubenflug und Sprung auf ein Feuerwehrsprungtuch, vorgeführt hat.

Der optische Ausgleich in der Zeitlupe ist auf das Reflionsgesetz des Lichtstrahles gegründet; und wird dadurch bewirkt, daß die photographische Aufnahme von einem schnell bewegten Objekt auf einem stetig schnell bewegten Film erfolgt.

Durch die Zeitlupe wird der Kinematographie ein ergiebiges Gebiet für die Erforschung mannigfaltiger schneller Bewegungen eröffnet; deshalb erscheint es zeitgemäß, den optischen Ausgleich theoretisch zu untersuchen.

Zunächst betrachten wir einen einfachen optischen Ausgleich, der abgeändert in der Zeitlupe vorkommt. In Fig. 1 trifft ein ruhender, einfallender Lichtstrahl $\mathfrak{l}$ in einem Punkt O auf einen Spiegel $s\,\mathfrak{s}$, der sich um eine in O auf der Zeichenebene senkrechte Achse dreht; und $n\,O$ ist das Einfallslot. Der reflektierte Lichtstrahl l wird durch den Winkel $\widehat{n\,l} = \widehat{\mathfrak{l}\,n}$ bestimmt. Zur Veranschaulichung dieser Beziehung während der Drehung des Spiegels verwenden wir einen fünfgliedrigen Mechanismus, wie bei dem Heliostaten. Die vier Glieder $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{g}$, g, l bilden ein gleichschenkeliges Gelenkviereck mit den Gelenken O, $\mathfrak{L}$, N, L. Die beiden Glieder $\mathfrak{l}$, l haben gleiche Länge und ebenso die beiden Glieder $\mathfrak{g}$, g. Das Glied $\mathfrak{l}$ ist fest und als solches durch Schraffierung gekennzeichnet. Das schlitzförmige Glied n mit dem auf ihm senkrechten Spiegel $s\,\mathfrak{s}$ dreht sich um die feste Achse O, und in dem Schlitz gleitet der zylindrische Zapfen N, durch den die Glieder $\mathfrak{g}$, g drehbar ver-

bunden sind. Infolge dieser Anordnung halbiert n als Gerade betrachtet beständig den veränderlichen Winkel $\widehat{l\,l}$ und ist das Einfallslot für die jeweilige Lage des Spiegels. Sonach wird durch diesen Mechanismus zu jeder Drehung des Spiegels der entsprechende reflektierte Lichtstrahl l bestimmt. Und wenn umgekehrt ein von dem bewegten Punkt L ausgehender Lichtstrahl den Spiegel in O trifft, so befindet sich l als reflektierter Lichtstrahl in Ruhe.

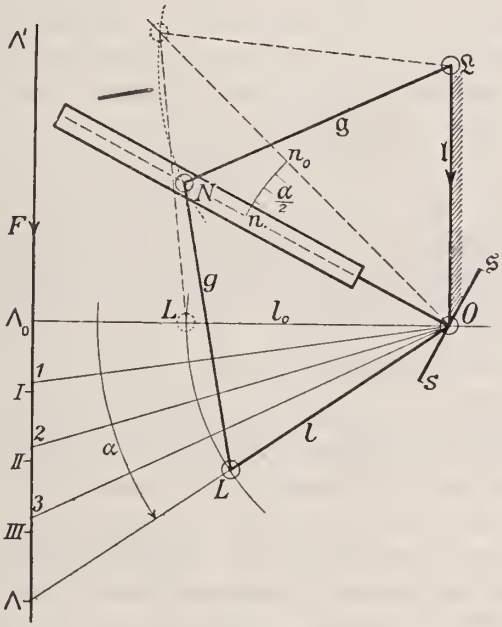


Fig. 1

Betrachten wir n_0 als eine Ausgangslage des Einfallslotes, das sich um einen Winkel $\widehat{n_0 n} = \frac{\alpha}{2}$ gedreht hat, und machen wir den Winkel $\widehat{n_0 l_0} = \widehat{l\,n_0}$; dann schwenkt der reflektierte Lichtstrahl von seiner Ausgangslage l_0 nach l um den Winkel $\widehat{l_0 l}$.

Hiernach ist

$$\hat{n l_0} + \hat{l_0 l} = \hat{\mathfrak{l} n_0} + \hat{n_0 n} \text{ und } \hat{n_0 n} + \hat{n l_0} = \hat{\mathfrak{l} n_0}.$$

Indem wir die zweite Gleichung von der ersten abziehen, ergibt sich

$$\hat{l_0 l} - \hat{n_0 n} = \hat{n_0 n}; \text{ mithin } \hat{l_0 l} = 2.\hat{n_0 n} = \alpha.$$

Das gleiche folgt, wenn wir n anderseits von n_0 um den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ drehen. Hiernach gilt der Satz:

Dreht sich bei einem ruhenden, einfallenden Lichtstrahl $\mathfrak{l}$ der Spiegel $s\mathfrak{s}$ um einen Winkel; dann schwenkt der reflektierte Lichtstrahl l in gleichem Sinn um einen doppelt so großen Winkel.

Bildet die Lage n_0 des Einfallslotes, wie es insonderheit gewählt ist, mit $\mathfrak{l}$ den Winkel $\hat{\mathfrak{l} n_0} = 45^0$, so ist der entsprechende reflektierte Lichtstrahl l_0 senkrecht auf $\mathfrak{l}$.

Wir nehmen nun an, daß ein zu l_0 senkrechter Film F sich proportional der Drehung des Spiegels $s\mathfrak{s}$ bewegt; und während dessen Einfallslot sich von n_0 nach n um den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ dreht, durchläuft der Film F die Wegstrecke $\Lambda_0\Lambda$, die von l_0, l begrenzt wird. Demnach entspricht dieser Wegstrecke $\Lambda_0\Lambda$ die Schwenkung des reflektierten Lichtstrahls von l_0 bis l. Ferner nehmen wir an, daß der bewegte reflektierte Lichtstrahl in allen seinen Lagen einen photographischen Bildpunkt von einem in $\mathfrak{l}$ liegenden Objektpunkt, etwa von $\mathfrak{L}$, auf dem bewegten Film F erzeugt. Die Wegstrecke $\Lambda_0\Lambda$ teilen wir beispielsweise in vier gleiche Teile, deren Teilpunkte I, II, III sind; und den Winkel $\hat{l_0 l}$ teilen wir auch in vier gleiche Teile, wodurch die drei reflektierten Lichtstrahlen bestimmt werden, die den Film in den Punkten 1, 2, 3 treffen.

Wird durch Drehung des Spiegels ein Filmpunkt nacheinander in die Lagen Λ_0, I, II, III, Λ bewegt, dann entstehen durch die entsprechenden reflektierten Lichtstrahlen die photo-

graphischen Bildpunkte Λ_0, 1, 2, 3, Λ auf dem Film, die den Filmpunkten Λ_0, I, II, III, Λ entsprechen. In den Punkten Λ_0, Λ liegen Bildpunkt und Filmpunkt vereint, aber in den drei anderen Lagen getrennt, wie es die Zeichnung veranschaulicht. Während der Bewegung bleibt der Bildpunkt innerhalb der Wegstrecke $\Lambda_0 \Lambda$ immer hinter dem Filmpunkt zurück. Demnach entsteht nur ein angenäherter optischer Ausgleich; denn ein vollkommener optischer Ausgleich erfordert, daß Bildpunkt und Filmpunkt beständig vereint sich auf der Wegstrecke $\Lambda_0 \Lambda$ bewegen.

Bei dem angenäherten optischen Ausgleich wird infolge der Abweichungen des Bildpunktes von dem entsprechenden Filmpunkt auf dem Film als Bild des Objektpunktes ein kurzer Strich erzeugt, dessen Länge gleich der auf dem Weg $\Lambda_0 \Lambda$ erlangten größten Abweichung ist; um diese nun zu ermitteln, verfahren wir in der folgenden Weise. Es sei x der Winkel, den ein reflektierter Lichtstrahl mit seiner Ausgangslage l_0 bildet, und der Abstand des Films F von dem Spiegelpunkt O gleich f; ferner seien die dem Winkel x entsprechenden Wegstrecken des von Λ_0 ausgehenden Filmpunktes und Bildpunktes beziehlich $\mathfrak{w}_f$, $\mathfrak{w}_b$. Da die Wegstrecke $\mathfrak{w}_f$ proportional dem Winkel x ist, so folgt, wenn k eine Konstante bezeichnet, $\mathfrak{w}_f = f \cdot k \cdot x$; ferner ist $\mathfrak{w}_b = f \cdot \tan x$. Für $x = \alpha$ ergibt sich, weil im Punkt Λ, Filmpunkt und Bildpunkt vereint liegen

$$f \cdot k \cdot \alpha = f \cdot \tan \alpha;$$

mithin ist die Konstante $k = \dfrac{\tan \alpha}{\alpha}$.

Bezeichnet y die Abweichung des Bildpunktes von dem Filmpunkt, so ist $y = \mathfrak{w}_f - \mathfrak{w}_b$.

Demnach ergibt sich die Abweichung

$$y = f \frac{\tan \alpha}{\alpha} x - f \cdot \tan x = f \left(\frac{\tan \alpha}{\alpha} x - \tan x \right)$$

und der Differential-Quotient von dieser Funktion

$$\frac{dy}{dx} = f \left(\frac{\tan \alpha}{\alpha} - \frac{1}{\cos^2 x} \right).$$

Für das Maximum der Abweichung ist

$$\frac{\tan \alpha}{\alpha} - \frac{1}{\cos^2 x} = 0,$$

also

$$\cos x = \sqrt{\frac{\alpha}{\tan \alpha}};$$

wobei die Winkel α, x in Gradmaß und in Bogenlänge des Kreises vom Radius $= 1$ gemessen werden.

Sind nun die konstanten Größen α, f gegeben, so erhalten wir rechnerisch den Wert des Winkels x, durch den die Wegstelle des Bildpunktes bestimmt wird, wo sich dessen größte Abweichung von dem entsprechenden Filmpunkt befindet. Durch die Einsetzung dieses Wertes in die Gleichung für y folgt das Maximum y_{max} der Abweichung. Wir haben nur die unterhalb der auf F senkrechten Geraden $\Lambda_0 O$ erfolgenden Schwenkung des reflektierten Lichtstrahls betrachtet, weil zu ihr die oberhalb stattfindende Schwenkung bezüglich $\Lambda_0 O$ symmetrisch ist. Demnach bewegt sich auf der Wegstrecke $\Lambda' \Lambda_0$, die gleich $\Lambda_0 \Lambda$ ist, der Bildpunkt vor dem Filmpunkt und es entstehen oberhalb dieselbeu Abweichungen nach vorwärts wie unterhalb nach rückwärts. Mithin ist die Länge des kurzen Striches, der als Bild des in Γ liegenden Objektpunktes erscheint, gleich $2 \cdot y_{max}$. Für die in der Zeitlupe vorkommende Strecke $f = 60$ mm und den kleinen Winkel $\alpha = 9^0$, dessen Bogenlänge gleich 0,15707 ist, ergibt sich durch Rechnung der Wert des Winkels $x = 5^0\, 12'\, 28''$, und die entsprechende Bogenlänge gleich 0,09089.

Nach Einsetzung in die Gleichung für y folgt:

$$y_{max} = 0{,}000502 \cdot 60 = 0{,}03012 \text{ mm};$$

mithin ist die Strichlänge $2 \cdot y_{max} = 0.06024$ mm, und dieser optische Ausgleich also ein sehr angenäherter.

In Fig. 2 ist die schematische Anordnung der Zeitlupe nach Lehmanns Angabe gezeichnet. Der angenäherte optische Ausgleich wird vermittelt durch eine um die im Punkt M zur Zeichenebene senkrechte Achse rotierende Spiegeltrommel T,

deren metallische Mantelfläche aus versilberten, die Spiegel bildenden Seitenflächen eines regulären Primas besteht; und der Zentriwinkel dieser Spiegel, von denen der Einfachheit halber nur 8 angenommen sind, ist mit α bezeichnet. Ein von einem Objektpunkt kommender horizontaler Lichtstrahl λ trifft einen gegen ihn unter 45° geneigten festen Spiegel Σ, und ist so gewählt, daß der reflektierte Lichtstrahl l den zu Σ parallelen Spiegel $s\,\mathfrak{s}$ in seiner Mitte S trifft. Der nun weiter reflektierte Lichtstrahl l geht in der optischen Achse $S\,\Lambda_0$

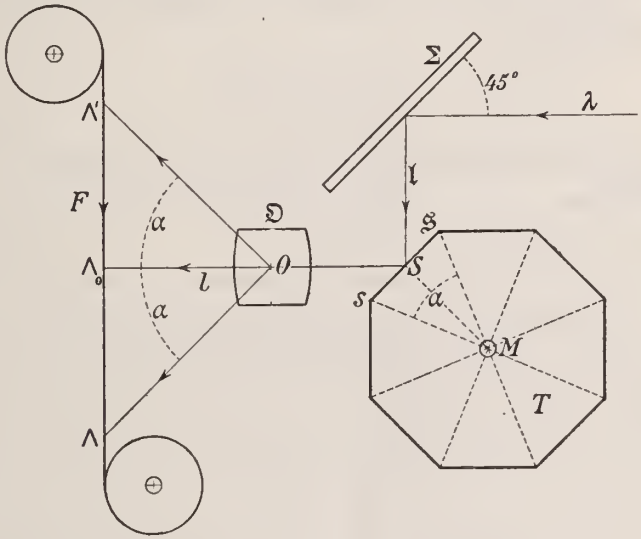


Fig. 2

durch das abbildende Objektiv $\mathfrak{D}$, in dem der Einfachheit halber die beiden identischen Paare der Hauptpunkte und der Knotenpunkte vereint in einem Punkt O liegend angenommen werden. Der Lichtstrahl l trifft in dem Punkt Λ_0 den auf ihm senkrechten Film F, der von einer Rolle auf eine andere geht, und sich von dem Punkt O im Abstand $\Lambda_0\,O$ gleich der Brennweite f das Objektiv befindet. Vermittelst Übertragung durch Zahnräder wird der Film proportional der Drehung der Spiegeltrommel fortbewegt, so daß jedem Spiegel ein Bild auf

dem Film entspricht. Während der Drehung der Spiegeltrommel um den Winkel α durchläuft der Film am Bildfenster eine Strecke $\Lambda'\Lambda$, die gleich der kinematographischen Bildhöhe ist; dabei geht der von dem gedrehten Spiegel reflektierte, bewegte Lichtstrahl im Objektiv durch den Punkt O und schwenkt von $O\Lambda'$ nach $O\Lambda$ um den Winkel $\Lambda' O \Lambda = 2\alpha$, der von $\Lambda_0 O$ halbiert wird. Dabei kann das Bildfenster vermittelst einer nahe vor dem Film F befindlichen, von außen verstellbaren Schlitzblende verengert und erweitert werden.

Die Spiegeltrommel enthält 40 Spiegel, und demnach ist der Zentriwinkel

$$\alpha = \frac{360^0}{40} = 9^0;$$

ferner ist der Abstand der Spiegel von der Achse der Spiegeltrommel

$$MS = 125 \text{ mm},$$

und die Brennweite des Objektivs,

$$\Lambda_0 O = f = 60 \text{ mm}.$$

Hiernach ergibt sich die Spiegelbreite

$$s\,\mathfrak{s} = 2.125 \cdot \tan 4^0, 30' = 19{,}6 \text{ mm}$$

und die übliche Bildhöhe

$$h = 2.60 \cdot \tan 9^0 = 19 \text{ mm}.$$

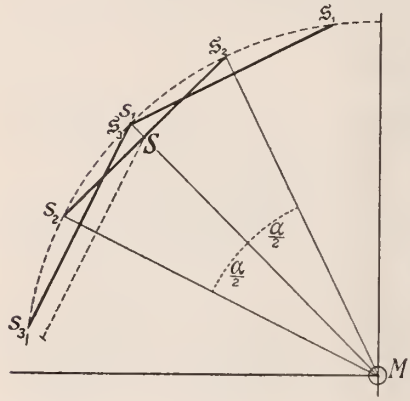


Fig. 3

Um den Strahlengang in der Zeitlupe für die einzelnen Spiegellagen zu veranschaulichen, und seinen Eintritt in das Objektiv zu konstruieren, nehmen wir zuvörderst in der schematischen Fig. 3 die Eingangslage $s_1\,\mathfrak{s}_1$, die Mittellage $s_2\,\mathfrak{s}_2$ und die Ausgangslage $s_3\,\mathfrak{s}_3$ eines der Deutlichkeit halber sehr breiten Spiegels $s\,\mathfrak{s}$ an, der um die

Achse M eine Drehung gleich seinem Zentriwinkel α ausführt. Die beiden äußersten Lagen $s_1 \mathfrak{s}_1$, $s_3 \mathfrak{s}_3$ stoßen in dem Endpunkt des in der Mitte S auf $s_2 \mathfrak{s}_2$ senkrechten Radius zusammen. Der Abstand dieses Endpunktes von S sei gleich φ. Da der Radius des Kreises gleich $\dfrac{MS}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}$ ist, so folgt

$$\varphi = \frac{MS}{\cos\frac{\alpha}{2}} - MS = \left(\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}} - 1\right) MS,$$

und für die Werte $\alpha = 9^0$, $MS = 125$ mm ergibt sich

$$\varphi = 0{,}386 \text{ mm}.$$

Die anderen Lagen des Spiegels sind innerhalb des Kreisbogens $\overset{\frown}{\mathfrak{s}_1 s_3}$ liegende Sehnen, welche die kurze Strecke φ schneiden.

Zur leichteren Übersicht der Strahlengänge ist erforderlich, daß wir die Spiegellagen abändern. Zu diesem Zweck denken wir uns jede Sehne mit ihrem Schnittpunkt auf der Strecke φ nach dem Punkt S parallel zu sich verlegt; sowie z. B. die Sehne $s_3 \mathfrak{s}_3$ mit ihrem Endpunkt $\mathfrak{s}_3$ nach S parallel zu sich verlegt und als solche durch Gestrichelung gekennzeichnet ist. Damit ist die Vereinfachung erlangt, daß die parallel verlegten Lagen der Spiegel durch die Mitte S der einzigen unveränderten Mittellage $s_2 \mathfrak{s}_2$ gehen, und in dieser Mitte die Eingangslage und die Ausgangslage zusammenstoßen. Diese Anordnung, durch die das Verständnis des optischen Ausgleiches sehr erleichtert wird, wollen wir die Hilfsspiegel-Schwenkung nennen. Die dabei entstehende Abweichung von den wirklichen Strahlengängen ist wegen der verhältnismäßig kurzen Strecke φ gering. Diese Abweichung ist am größten für jene beiden äußersten Lagen, weil sie um die ganze Strecke φ verlegt sind; dagegen bleibt für die unveränderte Mittellage der wirkliche Strahlengang bestehen; und sie ist dadurch von allen anderen Lagen ausgezeichnet.

Auf Grund der Hilfsspiegel-Schwenkung wollen wir in der schematischen Fig. 4 den mit starken Pfeilen gekennzeichneten Strahlengang für die zu dem festen Spiegel Σ parallelen Mittellage $s_2 \mathfrak{s}_2$ und den mit schwachen Pfeilen gekennzeichneten Strahlengang für die parallel verlegte Ausgangslage $s_3 \mathfrak{s}_3$ des Spiegels konstruieren. Wir haben diese beiden Strahlengänge deshalb gewählt, weil sie nach ihrem Gang durch den Objektivpunkt O bis an den bewegten Film F in der Lage mit den reflektierten Strahlen bei dem optischen Ausgleich in Fig. 1 übereinstimmen. Wir nehmen anstatt der wirklichen Größe des Zentriwinkels $\alpha = 9^0$ schematisch 30^0 an. Die beiden Lagen $s_2 \mathfrak{s}_2$, $s_3 \mathfrak{s}_3$, sowie die auf sie gefällten Senkrechten MS, Ms_2 bilden den Winkel $\frac{\alpha}{2}$. Ferner setzen wir die vertikale Strecke AIB, deren Mitte I ist, als Objekt für die Zeitlupe ohne Vorsatzlinse nahe vor den Spiegel Σ. Dadurch wird die Zeichnung der Strahlengänge absichtlich der Deutlichkeit halber verzerrt.

Für den Spiegel Σ ist zu dem Objekt AIB das Spiegelbild $A_s I_s B_s$ symmetrisch, und für den Spiegel $s_2 \mathfrak{s}_2$ ist zu $A_s I_s B_s$ das Spiegelbild $A'' I'' B''$ symmetrisch. Durch den zu O bezüglich $s_2 \mathfrak{s}_2$ symmetrischen Punkt O_s'', der in der Geraden $I_s S$ liegt; und durch den zu O_s'' bezüglich Σ symmetrischen, in der Geraden $O_s'' O$ liegenden Punkt O'', wobei IO'' gleich und parallel $I'O$ ist, wird der Strahlengang für den Spiegel $s_2 \mathfrak{s}_2$ bestimmt. Die betreffenden von dem Objekt AIB kommenden Strahlen sind nach dem Punkt O'' gerichtet, treffen den Spiegel Σ, und die von ihm reflektierten Strahlen sind nach dem Punkt O_s'' gerichtet. Die von dem Spiegel $s_2 \mathfrak{s}_2$ reflektierten Strahlen gehen dann durch den Objektivpunkt O nach dem bewegten Film F, auf dem das entsprechende Bild $a'' i'' b''$ von dem Objekt AIB entsteht. Demnach bewirkt die Spiegellage $s_2 \mathfrak{s}_2$, daß, von O aus gesehen, das Objekt AIB durch die Spiegelungen nach dem Spiegelbild $A'' I'' B''$ verlegt erscheint.

In ähnelnder Weise ergibt sich der andere Strahlengang; denn für die Ausgangslage $s_3 \mathfrak{s}_3$ ist zu $A_s I_s B_s$ das Spiegelbild

$A'''I'''B'''$ symmetrisch. Durch den zu O bezüglich $s_3\,\mathfrak{s}_3$ symmetrischen Punkt O_s''' und den zu O_s''' bezüglich Σ symmetrischen Punkt O''' wird der Strahlengang für den Spiegel $s_3\,\mathfrak{s}_3$ bestimmt. Die betreffenden von dem Objekt AIB kommenden Strahlen sind nach dem Punkt O''' gerichtet und die von dem Spiegel Σ reflektierten Strahlen sind nach dem Punkt O_s''' gerichtet. Nun aber treffen diese reflektierten Strahlen in der schematischen Zeichnung den über S verlängert gedachten Spiegel $s_3\,\mathfrak{s}_3$, von dem die reflektierten Strahlen durch den Objektivpunkt O gehen und das entsprechende Bild $a'''i'''b'''$ auf dem bewegten Film F erzeugen. Demnach bewirkt die verlängerte Spiegellage $s_3\,\mathfrak{s}_3$, daß, von O aus gesehen, das Objekt AIB durch die Spiegelungen nach dem Spiegelbild $A'''I'''B'''$ verlegt erscheint.

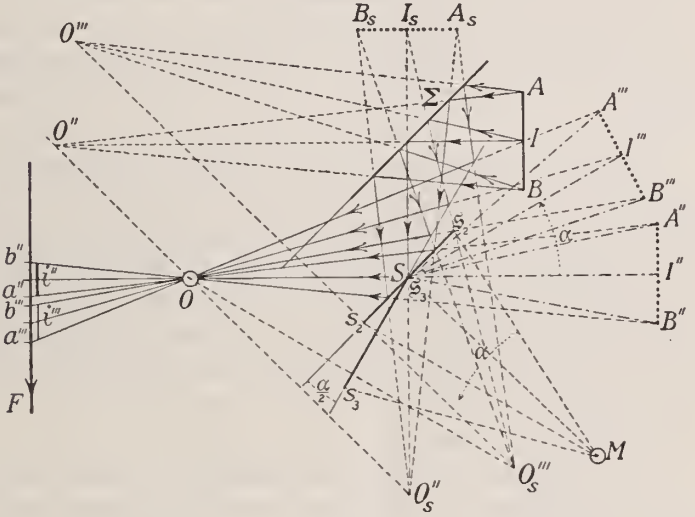


Fig. 4

Analoge Beziehungen würden sich für die Eingangslage ergeben, der ein unterhalb SI'' liegendes nicht eingezeichnetes Spiegelbild $A'I'B'$ entspricht; und deshalb können wir auf die Konstruktion des zugehörigen Strahlenganges verzichten, durch den die Übersicht in der Zeichnung beeinträchtigt würde.

Es sei nur bemerkt, daß die durch den Objektivpunkt O gehenden reflektierten Strahlen dann von der unterhalb OS befindlichen Verlängerung der Spiegellage erfolgt.

Die beiden den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ einschließenden nach rechts hin verlängerten Spiegellagen $s_2 \mathfrak{s}_2$, $s_3 \mathfrak{s}_3$ sind Mittelsenkrechte auf den Strecken $I_s I''$, $I_s I'''$, und die Fußpunkte liegen auf einem über den Durchmesser $I_s S$ beschriebenen Halbkreis, in dem $\frac{\alpha}{2}$ ein Peripheriewinkel ist. Für die kongruenten Spiegelbilder $A'' I'' B''$, $A''' I''' B'''$ ist S der selbstentsprechende Punkt und mithin liegen die Punkte I'', I''' auf einen um S beschriebenen durch I_s gehenden Halbkreis; demzufolge ist in ihm der Zentriwinkel $I'' S I''' = \alpha$. Hiernach ergibt sich der Satz:

Bei der Hilfsspiegel-Schwenkung entspricht einer Schwenkung des Spiegels um einen Winkel eine Drehung des Spiegelbildes um den doppelt so großen Winkel.

Von dem Objektivpunkt O aus gesehen erscheint das Objekt AIB in den Lagen $A' I' B'$, $A'' I'' B''$, $A''' I''' B'''$ des Spiegelbildes; demnach können wir uns den Bewegungsvorgang in der Zeitlupe so vorstellen, daß während der Drehung der Spiegeltrommel um den Winkel α das gespiegelte Objekt um S als feste Achse eine Drehung vollzieht, die gleich dem Winkel 2α ist, und von allen seinen Lagen durch das Objektiv ein Bild auf dem Film F entsteht, der sich proportional der Drehung der Spiegeltrommel bewegt.

Zur Erklärung des optischen Ausgleiches wollen wir nur den von der Mitte I des Objektes nach dem Objektivpunkt O gehenden Strahl betrachten, ferner in der Zeichnung die wirkliche Größe des Winkel $\alpha = 9^0$ und der Strecke $OS = 32$ mm. Beachten wir nun, daß sich das wirkliche Objekt in größerer Entfernung von der Zeitlupe befindet, also die Strecke SI''' verhältnismäßig lang gegen die Strecke OS ist; dann folgt anschaulich aus dem Dreieck SOI''', daß je länger die Strecke SI''' ist, desto mehr nähert sich der Winkel $I'' OI'''$ dem

Winkel $I'' S I''' = \alpha$, aber mehr noch für die Zwischenlagen von $S I'''$ nach $S I''$, und dabei ist der Winkel $I'' O I'''$ stets kleiner als der Winkel $I'' S I'''$. Hiernach entspricht der Drehung der Spiegeltrommel um einen Winkel eine Schwenkung des durch O gehenden Strahles um den angenähert doppelt so großen Winkel. Mithin ergibt sich auf dem bewegtem Film von der Mittellage i'' an in allen anderen Lagen eine Abweichung des Bildpunktes von dem entsprechenden Filmpunkt, die am größten in der Ausgangslage i''' ist; und der Bildpunkt bleibt immer hinter dem Filmpunkt zurück.

Um ein Beispiel von der Annäherung des Winkels $I'' O I'''$ an den Winkel $\alpha = 9^0$ und der größten Abweichung des Bildpunktes von dem entsprechenden Filmpunkt zu geben, nehmen wir das Objekt noch verhältnismäßig nahe vor der Zeitlupe, nämlich die Strecke $S I''' = 1000$ mm an; dann folgt aus dem Dreieck $O S I'''$, in welchem die Seite $O S = 32$ mm, die Seite $S I''' = 1000$ mm und der Außenwinkel $\alpha = 9^0$ ist, durch Rechnung der Winkel $I'' O I''' = 8^0\,43'$. Da ferner die Brennweite des Objektivs, die Strecke $O i'' = 60$ mm ist, so ist der Weg des Filmpunktes von i'' an $60 . \tan 9^0 = 9{,}504$ mm und der Weg des Bildpunktes $60 \cdot \tan 8^0\,43' = 9.202$ mm, mithin ist die Differenz dieser beiden Wege, die größte Abweichung gleich 0.302 mm. Diese verhältnismäßig große Abweichung verkleinert sich mit der Vergrößerung der Entfernung des Objektes, und der optische Ausgleich nähert sich dann immer mehr dem sehr angenäherten optischen Ausgleich in Fig. 1. Ferner verkleinert sich diese Abweichung, wenn das Objektiv näher an S verschoben, also die Strecke $O S$, soweit es praktisch zulässig ist, verkürzt wird. Der optische Ausgleich wird sehr gefördert durch eine vermittelst Zahnräder bewirkte präzise Übertragung der Bewegung von der Spiegeltrommel auf den Film. Wir haben nur die Beziehungen in dem Bewegungsvorgang von der Mittellage bis zur Ausgangslage des Spiegels betrachtet, weil analoge Beziehungen in dem Bewegungsvorgang von der Eingangslage bis zur Mittellage stattfinden.

Da wir durch die Hilfsspiegel-Schwenkung nur annäherungsweise zur Kenntnis der Bewegungsvorgänge gelangt sind, so müssen wir noch erörtern, wie die Reflexion der Strahlen in den wirklichen Lagen des sich um die Achse M drehenden Spiegels vor sich geht. In der schematischen Fig. 4 treffen die von $A_s I_s B_s$ nach O_s''' gerichteten Strahlen auf die verlängert gedachte Spiegellage $s_3 \mathfrak{s}_3$ und können daher nicht nach dem Objektivpunkt O reflektiert werden. Wenn wir aber den von $s_2 \mathfrak{s}_2$, $s_3 \mathfrak{s}_3$ eingeschlossenen Winkel $\frac{\alpha}{2}$ auf seine wirkliche Größe 4°, 30′ verkleinern, dann rückt der zu O bezüglich $s_3 \mathfrak{s}_3$ symmetrische Punkt O_s''' sehr nahe an den Punkt O_s'', so daß der Strahl $B_s O_s'''$ die Spiegellage $s_3 \mathfrak{s}_3$ trifft, aber der mittlere Strahl $I_s O_s'''$ geht nahe an S über sie vorüber. Da die Spiegellage $s_3 \mathfrak{s}_3$ von der wirklichen um die berechnete Strecke $\mathfrak{s}_3 S = 0{,}386$ parallel verlegt ist, so ist es nun notwendig, in einem großen Maßstab bei den wirklichen Maßverhältnissen die Konstruktion der reflektierten Strahlen einige Spiegellagen genau auszuführen. Dabei ergibt sich zeichnerisch, daß die Spiegellage bei 1° vor dem Ausgang die von $B_s I_s$ kommenden und von der unteren Hälfte des Objektes $A\,I\,B$ ausgehende Strahlen reflektiert; und daß die Spiegellage nach 1° bei dem Eingang die Strahlen von der oberen Hälfte reflektiert. Hiernach können die von einem Objekt kommenden Strahlen nur zum Teil reflektiert werden und zur Erzeugung der Bildpunkte auf dem Film gelangen. Und erst vermittelst Aufnahmen sehr schneller feiner Bewegungsvorgänge kann erkannt werden, wie sich die Zeitlupe als „Zeitmikroskop“ bewährt. Ob z. B. bei einem Sandstrahlgebläse die Bewegung der schleifenden Sandkörner veranschaulicht wird, und bei der schnellen Bewegung des Auges die durch dessen sechs Muskeln bewirkten verschiedenen Phasen erkennbar werden[1]).

[1]) Siehe L. Burmester, Kinematische Aufklärung der Bewegung des Auges. Diese Sitzungsberichte, Jahrg. 1918, S. 200.

Ausnahmefachwerke und ihre Determinante.

Von **Heinrich Liebmann.**

Vorgelegt in der Sitzung am 8. Mai 1920.

§ 1. Einführung und Übersicht.

Ausnahmefachwerke sind Fachwerke, die die Grundbedingung des sowohl kinematisch wie statisch bestimmten Fachwerks erfüllen, nämlich in der Ebene die Beziehung $s = 2k - 3$, im Raum die Beziehung $s = 3k - 6$ zwischen der Anzahl s der Stäbe und der Anzahl k der Knotenpunkte, die aber doch im Stande sind, innere Stabspannungen aufzunehmen, ohne daß in den Knotenpunkten äußere Kräfte angreifen (statischer Ausnahmefall). Diese Fachwerke gehören nach A. Föppl[1]) zugleich den kinematischen Ausnahmefällen an, d. h. sie lassen infinitesimale innere Bewegungen zu, die dadurch charakterisiert sind, daß wohl die Stablängen, nicht aber die Winkel je zweier Nachbarstäbe unverändert bleiben. (Fachwerke, die endliche innere Bewegungen zulassen, wie in der Ebene das bekannte Fachwerk [$s = 9$, $k = 6$], das aus zwei kongruenten gleichgestellten Dreiecken besteht, deren entsprechende Ecken durch drei parallele gleichlange Stäbe verbunden sind, oder im Raum das bekannte Bricardsche Oktaeder [$s = 12$, $k = 6$], wären als Mechanismen zu bezeichnen). Daß statischer und kinematischer Ausnahmefall sich decken, ist übrigens für Dreiecksflechtwerke oder Trigonalpolyeder leicht

[1]) A. Föppl, Theorie des Fachwerks, Leipzig 1880, S. 36.

direkt zu erweisen[1]). Ebenso ist leicht zu sehen, daß sich für Polyeder mit starren Seitenflächen, die übrigens keineswegs ebene Polygone zu sein brauchen, sofort innere Stabspannungen konstruieren lassen, wenn bei ihnen innere Bewegungen möglich sind[2]).

Diese Eigenschaft der Ausnahmefachwerke läßt sich bei der eben erwähnten Gattung leicht aus der bekannten, nach F. Lindemann[3]) keineswegs an die Giltigkeit des Parallelenpostulates gebundenen Analogie zwischen Kräften und infinitesimalen Rotationen beweisen. Unten (§ 4, Nr. 4) ist die Gelegenheit wahrgenommen, die Analogie allgemein auch für den nichtenklidischen Fall zu begründen.

In § 2 wird zunächst der Ausnahmefall beim Oktaeder besprochen. Da (nach Abfassung der vorliegenden Untersuchung) die bereits erwähnte Arbeit von Blaschke erschienen ist, durfte die statische und die kinematische Begründung für den Ausnahmefall, also die Untersuchung und Aufstellung der notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das „wackelige" mit „inneren Eigenspannungen" verträgliche Achtflach gekürzt dargestellt werden (Nr. 1). In Nr. 2 wird zunächst ein vielleicht auch in der Praxis möglicher Spezialfall besprochen und sodann eine Beziehung zu den Flächen zweiten Grades hergestellt.

§ 3 ist analytischen Untersuchungen gewidmet. Es wird nämlich die Fachwerkdeterminante D, deren Verschwinden nach Föppl die notwendige und hinreichende Bedingung für den Ausnahmefall ist, wirklich aufgestellt, in Nr. 1 für das Oktaeder, in Nr. 2 für ein gewisses Dekaeder (windschiefes Fünf-

[1]) Vgl. M. Dehn, Über die Starrheit konvexer Polyeder (Math. Annalen 77, 1916, S. 466—473).

[2]) Vgl. W. Blaschke, Über affine Geometrie, XXVI, Wackelige Achtflache (Math. Zeitschrift 6, 1920, S. 85—94). — „Wackeligkeit" ist übrigens nicht nur *affin invariant*, sondern *projektiv* invariant! (Vgl. unten § 4, Nr. 2.)

[3]) F. Lindemann, Über unendlich kleine Bewegungen und über Kraftsysteme bei allgemeiner projektivischer Maßbestimmung, § 11, S. 116—118 (Math. Annalen 7, 1874, S. 56—143).

eck, die Ecken noch mit zwei weiteren Knotenpunkten durch Stäbe verbunden).

Der Zweck dieser Aufstellung war, die Gleichung für den *gefährlichen Ort* zu finden, d. h. für die Fläche, an die ein Knotenpunkt P_i gebunden ist, wenn bei Festlegung der übrigen Knotenpunkte im Raum der Ausnahmefall vorliegen soll. Dabei fand sich in Nr. 2 Gelegenheit, die erhaltene Gleichungsform der F_3 mit einem Knotenpunkt zur Ableitung der bekannten Eigenschaften dieser Fläche[1]) zu verwenden.

In Nr. 3 wird dann das Fachwerk vom Doppelpyramidentypus (n-Eck, jede Ecke noch mit zwei weiteren Knotenpunkten verbunden; $k = n + 2$, $s = 3n = 3k - 6$) heuristisch behandelt als Verallgemeinerung der in Nr. 1 und 2 besprochenen Fälle $n = 4$, $n = 5$. Zur völligen Aufklärung über die dort aufgestellten Vermutungen müßten jedenfalls weitergehende kombinatorische Hilfsmittel herangezogen werden.

Die Entwickelung der Fachwerkdeterminante in eine Summe von Produkten drei- bzw. vierreihiger Determinanten führte ganz von selbst zur Verwendung einer Symbolik (vgl. § 3, Nr. 2, Formel (1), ferner § 4, Nr. 2, Fußnote usw.), deren sich der früh verstorbene Mathematiker M. Reiß mit großem Erfolg bedient hat[2]). Seine Leistungen, im allgemeinen wenig beachtet[3]), sind neuerdings von Study wieder zu einem wichtigen Instrument der Forschung erhoben und ausgebaut worden.

[1]) Vgl. z. B. Pascals Repertorium der höheren Mathematik II (Erste Auflage), Leipzig 1902, Kap. XI, insbesondere S. 289.

[2]) M. Reiß, Analytisch-geometrische Studien. Math. Annalen 2 (1870), S. 385—426. — Auf diese Arbeit hat mich mein verehrter Kollege F. Engel hingewiesen, nachdem meine Untersuchungen abgeschlossen waren.

[3]) Weder der einschlägige Enzyklopädieartikel I A 2 von E. Netto noch G. Kowalewskis Einführung in die Determinantentheorie (Leipzig 1909) würdigen die Verdienste von M. Reiß. Dagegen vergleiche man E. Pascal (Die Determinanten, übersetzt von H. Leitzmann, Leipzig 1900, S. 84) und E. Study, Geometrie der Dynamen, Leipzig 1902, S. 127.

Reiß hatte sich eine Aufgabe gestellt, die wir, spezialisiert auf (ebene) algebraische Kurven C_n und auf algebraische Flächen F_n, so aussprechen können. Gegeben seien die rechtwinkligen oder die homogenen Koordinaten von

$$c_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \text{ bzw. } f_n = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$$

Punkten. Es soll die Determinante D, deren Verschwinden besagt, daß die c_n (f_n) Punkte auf einer C_n (F_n) liegen, in eine übersichtliche Form gebracht werden[1]). *Diese neue Determinante „E", zu der Reiß gelangt, hat nun gerade die Gestalt, welche die Fachwerkdeterminante D durch Laplacesche Entwickelung ganz von selbst annimmt.* Sie ist nämlich eine Summe von Produkten von Determinanten, die bei Benützung rechtwinkliger Koordinaten die Bedeutung von Dreiecks- (bzw. Tetraeder-)inhalten haben, abgesehen von den Zahlenfaktoren zwei (und sechs). Bei der Determinante E sind die Eckpunkte dieser Figuren gewisse Tripel (Quadrupel) der c_n (f_n) Punkte, welche auf der C_n (F_n) liegen sollen, bei der Fachwerkdeterminante selbstverständlich Knotenpunkte des Fachwerks[2]).

In § 4 werden einige allgemeine Sätze über die Fachwerkdeterminante D bewiesen. Dabei ist vorerst (Nr. 1) die Beschränkung auf Fachwerke mit mindestens einem Stabdreieck angebracht, weil andernfalls erst weitere Untersuchungen über die Abhängigkeit der $(3k-9)$-reihigen Determinante der Fach-

[1]) Die Reißsche Darstellung der C_n (F_n), die auf diesem Wege erhalten wird — und deren Durchführung nach dem Zeugnis des Entdeckers (a. a. O., S. 394) im einzelnen Schwierigkeiten zu überwinden hat — „enthält die wahre analytische Darstellung der Graßmannschen Erzeugung von Kurven und Flächen" (briefliche Äußerungen von F. Engel). Vgl. Graßmanns Werke, herausgegeben von F. Engel, Band III, 2, Leipzig 1911, S. 105—108.

[2]) Diese besondere Struktur der Fachwerkdeterminante hat — für Trigonalpolyeder — bereits Dehn a. a. O. herangezogen bei seinem Beweis des Cauchyschen Satzes über konvexe Polyeder.

werk-*Matrix* (vgl. § 4, Nr. 4) von $3k-6$ Zeilen und $3k$ Reihen der vermutlich sehr umständlichen Durchführung im einzelnen bedurft hätten[1]). Sodann wird (Nr. 2) die projektive Invarianz von D bewiesen und dabei der Grad g_λ für den „gefährlichen Ort" (s. oben) eines beliebigen Knotenpunktes P_λ erkannt. Er ist

$$g_\lambda = \sigma_\lambda - 2,$$

wobei σ_λ die Anzahl der von P_λ ausgehenden Stäbe ist[2]). Endlich wird noch gezeigt (Nr. 3), daß D auch bei Einführung projektiver Maßbestimmung invarianten Charakter zeigt, und daß (Nr. 4) auch in der nichtenklidischen Geometrie — ohne Beschränkung auf Fachwerke mit Stabdreiecken — statischer und kinematischer Ausnahmefall sich decken.

Wie schon diese Übersicht erkennen läßt, war mehrfach Gelegenheit, Fragen zu streifen, deren endgültige Erledigung noch über den Rahmen der hier begründeten Ergebnisse hinausgeht.

§ 2. Der Ausnahmefall beim Oktaeder.

1. Die notwendige und hinreichende Bedingung. Es möge ein Oktaederfachwerk vorliegen, also vier in Knotenpunkte verbundene Stäbe (12), (23), (34) und (41); die Knotenpunkte 1 bis 4 sind noch mit zwei weiteren Punkten 5 und 6 durch Stäbe verbunden[3]).

Wir erörtern den Ausnahmefall zunächst statisch, fragen also: Welche Bedingungen sind dem Fachwerk aufzuerlegen, damit innere Spannungen möglich sind, die in jedem Knoten die Resultante Null für die Gelenkdrücke ergeben?

---

[1]) Die Hilfsmittel dazu liegen vor. (Pascal, Determinanten, § 29 bis 31 (S. 119—124).

[2]) L. Henneberg, Die graphische Statik der starren Systeme (Leipzig 1911) gibt für den Grad des „gefährlichen Ortes", oder nach seiner Ausdrucksweise, der „Grenzfläche", S. 665 richtig $g_\lambda = 2$ bei $\sigma_\lambda = 4$, dagegen S. 669 $g_\lambda = 4$ (statt 3) bei $\sigma_\lambda = 5$.

[3]) Wir bezeichnen hier die Knotenpunkte zumeist durch Ziffern 1, 2... und nur ausnahmsweise mit P_1, P_2 usw. die Stäbe durch die Ziffern der Endpunkte in ( ) gesetzt, entsprechend die Stabdreiecke.

Die Spannungen in den Stäben des Dreiecks (3 4 5) ergeben Gelenkdrücke

$$K_{34} = -K_{43},\quad K_{45} = -K_{54},\quad K_{53} = -K_{35}.$$

Es sei ferner

$$\begin{aligned} K_3 &= K_{34} + K_{35}, \\ K_4 &= K_{43} + K_{45}, \\ K_5 &= K_{53} + K_{54}. \end{aligned}$$

Dann haben die Kräfte K_3, K_4 und K_5 zusammen die Resultante Null, ihre Angriffslinien gehen also durch einen Punkt der Ebene E_{345}. K_3 soll sich dann in zwei Kräfte zerlegen lassen, K_{32} und K_{36} nach den Stäben (32) und (36), also muß die Angriffslinie von K_3 mit diesen Stäben in einer Ebene liegen, sie ist also die Spur der Ebene E_{236} auf E_{345}, und Entsprechendes gilt für K_4 und K_5. (Vgl. die schematische, nur als Merktafel der Bezifferung gedachte Figur 1.)

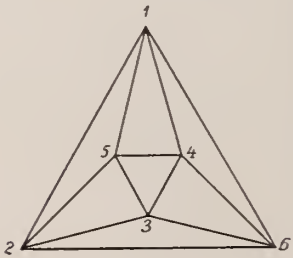


Fig. 1

Es gilt also der Satz: Damit beim Oktaederfachwerk der Ausnahmefall eintritt, müssen die Spuren der drei Ebenen (z. B. E_{236}, E_{641}, E_{152}), in denen die an ein Dreieck, z. B. (261) mit einer Kante angrenzenden Dreiecke liegen, auf der Ebene des Gegendreiecks (hier (345)) durch einen Punkt gehen.

Oder kürzer (Blaschke):

Die Ebenen von je vier Dreiecken, die keine Kante gemein haben, müssen durch einen Punkt gehen.

Daß diese Bedingung auch hinreichend ist, kann nachträglich durch Angabe eines — bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmten — Systems innerer Spannungen bewiesen werden, die zunächst in (34), (45), (53) so angenommen werden, daß die Gelenkdrücke in 3, 4, 5 die Spuren der Ebenen E_{236}, E_{641}, E_{152} zu Angriffslinien haben und eine Resultante vom

Betrag Null besitzen; die Fortpflanzung der Spannungen in den Stäben ist dann leicht anzugeben.

Dieselbe Bedingung erhält man kinematisch so: Wenn eine (unendlich kleine) starre Bewegung des Dreiecks (3 4 5) möglich sein soll, bei der die Punkte 1, 2, 6 ihre Lage nicht ändern, so müssen dabei die Punkte 3, 4, 5 Bahnelemente beschreiben, die zu den Ebenen E_{236}, E_{641}, E_{152} senkrecht stehen. Diese Ebenen sind also die den drei Punkten zugeordneten „Nullebenen" des zur geforderten infinitesimalen Bewegung gehörigen Nullsystems. Die Nullebenen dreier Punkte 3, 4, 5 einer Ebene E_{345} gehen aber durch einen Punkt dieser Ebene — und damit ist also nochmals gezeigt, daß, um „Wackeligkeit" zu erreichen, die bezeichneten vier Ebenen durch einen Punkt gehen müssen.

2. Gestalt der wackeligen Achtflache. Fachwerke die die abgeleitete Bedingung erfüllen, sind leicht herzustellen. Man geht von (3 4 5) aus und legt die drei Ebenen $\overline{E}_3$, $\overline{E}_4$ und $\overline{E}_5$ durch einen beliebig auf der Ebene E_{345} angenommenen Punkt P (zwei Freiheitsgrade) und die Geraden $P3$, $P4$, $P5$ (weitere drei Freiheitsgrade). 6, 1 und 2 sind dann drei im übrigen beliebige Punkte auf den drei Geraden $\overline{E}_3 \times \overline{E}_4$, $\overline{E}_4 \times \overline{E}_5$, $\overline{E}_5 \times \overline{E}_3$. Es bleiben also nach Festlegung von (3 4 5) noch acht Freiheitsgrade[1]).

Ein einfacher, in der Praxis bei krahnähnlichen Gerüsten vielleicht nicht ausgeschlossener Spezialfall hievon ist das folgende Fachwerk: Die Punkte 1, 2, 3, 4 liegen in einer Ebene, es seien die Schnittpunkte (g_{12}, g_{34}) bzw. (g_{23}, g_{41}) noch mit 7 und 8 bezeichnet; wir fordern, daß 5 und 6 in einer Ebene durch g_{78} liegen.

---

[1]) Bricards Konstruktion des Oktaeder-Mechanismus (octaèdre articulé) zeigt nach Wahl eines Dreiecks ABC noch zwei Freiheitsgrade; sie beginnt auch mit Wahl eines willkürlichen Punktes in der Ebene des Dreiecks (Journal de Math. (5) B, (1897) p. 144).

In diesem Falle liegen

2 3 6 8 in der Ebene E_{236},
1 4 6 8 „ „ „ E_{146},
1 2 5 7 „ „ „ E_{125},
3 4 5 7 „ „ „ E_{345}.

Die Spuren von E_{236} und E_{146} auf E_{345} gehen daher durch den Schnittpunkt der beiden Geraden g_{68} und g_{57}; die Spur von E_{125} auf E_{345} aber ist die Gerade g_{57}, also gehen in der Tat die drei Spuren durch einen Punkt.

Im allgemeinen Fall ist 1 2 3 4 ein windschiefes Vierseit. Um dann bei gegebenem 5 die Lagebeschränkung für 6 ausfindig zu machen, denken wir uns durch 5 die Treffgerade g' von g_{12} und g_{34}, also die Schnittgerade von E_{125} und E_{345}, und durch 6 die Treffgerade g'' von g_{23} und g_{41}, also die Schnittgerade von E_{236} und E_{146} gelegt. Diese vier Ebenen sollen durch einen Punkt gehen, also müssen g' und g'' einander treffen. Dies bedeutet aber, *daß der Punkt 6 auf der Fläche zweiten Grades liegt, die die vier Geraden* g_{12}, g_{23}, g_{34}, g_{41} *und den Punkt 5 enthält.* (Vgl. die schematische Figur 2.)

Da bei dieser Betrachtung die Punkte (1, 2, 3, 4, 5, 6) mit (2, 5, 4, 6; 3, 1) und (1, 5, 3, 6; 2, 4) vertauscht werden können (vgl. Fig. 1), so ergibt sich noch der Satz: Liegen die

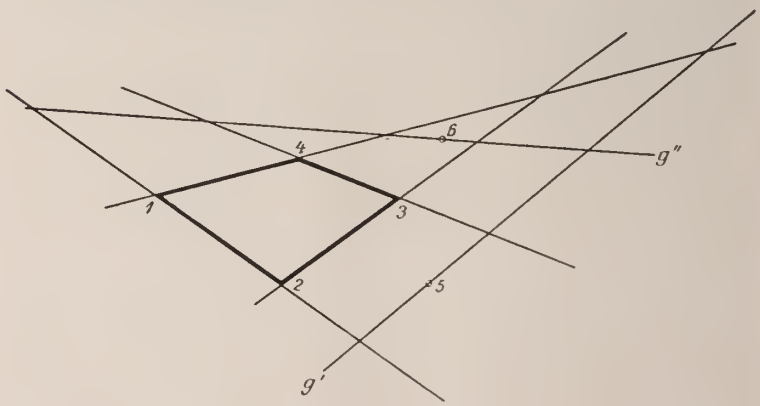


Fig. 2

Punkte 5 und 6 beide auf derselben F_2, die g_{12}, g_{23}, g_{34} und g_{41} enthält, so liegen auch 1 und 3 auf derselben g_{25}, g_{54}, g_{46}, g_{62} enthaltenden F_2 und 2 und 4 beide auf derselben g_{15}, g_{53}, g_{36}, g_{61} enthaltenden F_2.

Im Hinblick auf das in § 3, Nr. 3 zu besprechende Fachwerk vom Doppelpyramidentypus wollen wir hier bereits darauf aufmerksam machen, daß durch den Punkt 6 (später P_{n+2}) zwei dem gefährlichen Ort angehörige Gerade gehen, nämlich die Treffgeraden von g_{12}, g_{34} und von g_{23}, g_{41}. (In § 3, Nr. 2 begegnen uns dann fünf mit römischen Ziffern bezeichnete Gerade durch einen bestimmten Knotenpunkt usw.)

Wiederholt man die hier gegebene Konstruktion genau für den Fall, daß 1, 2, 3, 4 in einer Ebene liegen, so kommt man nur darauf, daß 5 und 6 beide in dieser Ebene E_{1234} liegen. Der zuvor besprochene Spezialfall muß also durch besondere Konstruktion genommen werden, was unschwer gelingt. Man sieht, daß die Ebenen E_{345} und E_{125} den Punkt 7 $(g_{12} \times g_{34})$ und die Ebenen E_{236}, E_{146} den Punkt 8 $(g_{23} \times g_{41})$ enthalten; der Grundforderung entsprechend, daß die vier Ebenen durch einen Punkt gehen sollen, müssen also die Schnittgerade g_{57} des ersten und die Schnittgerade g_{68} des zweiten Ebenenpaares einander treffen, also in einer Ebene liegen.

Demnach lautet das Ergebnis in vervollständigter Fassung: Sind 1, 2, 3, 4 vier getrennte ein Viereck bildende Punkte und liegt 5 auf keiner der vier Geraden g_{12}, g_{23}, g_{34}, g_{41}, so ist der gefährliche Ort für 6 die durch die vier Geraden gelegte, den Punkt 5 enthaltende F_2, wenn die Punkte 1 bis 4 ein windschiefes Viereck bilden. Liegen die vier Punkte aber in einer Ebene E_{1234}, so sind zwei Fälle zu unterscheiden: Liegt 5 in dieser Ebene, so ist 6 gar keiner Beschränkung unterworfen; liegt aber 5 nicht in E_{1234}, so liegt 6 entweder ebenfalls in dieser Ebene, oder in der durch 5 und die Schnittpunkte 7 von g_{12}, g_{34} und 8 von g_{23}, g_{41} gelegten Ebene E_{578}[1]).

[1]) Welche Ausartungen zeigt in diesen Spezialfällen der von Blaschke a. a. O. in Gestalt eines Möbiusschen Doppeltetraeders an-

§ 3. Wackelige Fachwerke vom Doppelpyramidentypus.

1. Das Oktaeder. Es soll jetzt das Oktaeder analytisch untersucht werden. Von den zwölf Gleichungen, auf die die Forderung unveränderter Stablängen führt:

$$(x_i - y_k)(\delta x_i - \delta x_k) + (y_i - y_k)(\delta y_i - \delta y_k) + (z_i - z_k)(\delta z_i - \delta z_k) = 0,$$

wobei für $i\,k$ die Ziffernpaare (1, 2) (2, 3) (3, 4) (4, 1); (1, 5) (2, 5) (3, 5) (4, 5); (1, 6) (2, 6) (3, 6) (4, 6) einzusetzen sind, lassen wir die zu (1, 2), (5, 1) und (5, 2) gehörigen fort; dementsprechend setzen wir auch

$$\delta x_i = \delta y_i = \delta z_i = 0 \ (i = 1, 2, 5).$$

Das darf gestehen, denn auf die „Wackeligkeit" des Oktaeders hat es keinen Einfluß, wenn man die Ecken des Stabdreiecks (1 2 5) festhält. Dann bleiben für die neun übrigen Koordinatenvariationen neun lineare homogene Gleichungen, deren Determinante wir in leicht verständlicher Symbolik so schreiben können:

$$D = \begin{vmatrix} r_{23} & 0 & 0 \\ r_{53} & 0 & 0 \\ r_{63} & 0 & r_{36} \\ r_{43} & r_{34} & 0 \\ 0 & r_{14} & 0 \\ 0 & r_{54} & 0 \\ 0 & r_{61} & r_{46} \\ 0 & 0 & r_{16} \\ 0 & 0 & r_{26} \end{vmatrix}.$$

Hier sind immer je drei Reihen zusammengefaßt, z. B. bedeutet r_{23} die drei hintereinander stehenden Elemente

---

gegebene reziproke Kräfteplan der inneren Spannungen? — Interessanter, aber schwieriger zu behandeln wäre die Frage: Wie sondert man aus den wackeligen Achtflachen die Bricardschen Oktaedermechanismen aus? (Vgl. die vorige Fußnote, sowie Math. Enzyklopädie IV, 3 [Kinematik von A. Schoenflies] Nr. 21, S. 242).

$$x_2 - x_3 \quad y_2 - y_3 \quad z_2 - z_3$$

und jede Null vertritt drei hintereinanderstehende Nullen.

Führt man noch die Abkürzung ein

$$D(\varkappa\lambda\mu\nu) = \begin{vmatrix} x_k - x_\lambda & y_k - y_\lambda & z_k - z_\lambda \\ x_k - x_\mu & y_k - y_\mu & z_k - z_\mu \\ x_k - x_\nu & y_k - y_\nu & z_k - z_\nu \end{vmatrix}$$

so kann man die entwickelte Determinante D einfach schreiben und erhält als analytischen Ausdruck für die Forderung der „Wackeligkeit“ die Gleichung:

$$D \equiv D(2356)\, D(1345)\, D(1246) - D(2345)\, D(1456)\, D(1235) = 0.$$

Hieraus sind unsere oben (§ 2, Nr. 2) gefundenen Ergebnisse wieder abzulesen: Hält man die Punkte 1 bis 5 fest, so beschreibt 6 eine Fläche zweiten Grades. Wählt man 6 so, daß

$$D(1246) = D(1236) = 0,$$

so ist die Gleichung erfüllt, also gehört die Gerade g_{12} dem angegebenen gefährlichen Ort F_2 an; dasselbe läßt sich für g_{23}, g_{34} und g_{41} nachweisen. Der Punkt 5 liegt auf der Fläche wegen

$$D(2355) = D(1455) = 0.$$

Liegen 1, 2, 3, 4 in einer Ebene E_{1234}, so spaltet sich von der Gleichung ein linearer Faktor ab, der gleich Null gesetzt, die Gleichung dieser Ebene ist, und der andere Faktor gibt, gleich Null gesetzt, die Gleichung einer Ebene durch 5 und die Schnittpunkte 7 und 8 der Geradenpaare g_{12}, g_{34} und g_{23}, g_{41}.

Es ist angebracht, noch ein Beispiel anzugeben: Bei der Koordinatenwahl

$$\begin{aligned} P_1 &: 0 \;\; 0 \;\; 0 \\ P_2 &: a \;\; 0 \;\; 0 \\ P_3 &: 0 \;\; a \;\; 0 \\ P_4 &: 0 \;\; 0 \;\; a \\ P_5 &: x_0 \;\; y_0 \;\; z_0 \\ P_6 &: x \;\; y \;\; z \end{aligned}$$

erhält man für den gefährlichen Ort von P_6 die Gleichung

$$x_0 y\,(z_0\,(a - x - y) - z\,(a - x_0 - y_0)) + z\,(x_0 y - y_0 x)\,(a - x_0 - y_0 - z_0) = 0.$$

2. Das Dekaeder. In derselben Weise wollen wir ein Dekaederfachwerk behandeln von folgender Gestalt: Fünf Punkte $P_1\,(0\,0\,0)$, $P_2\,(a\,a\,a)$, $P_3\,(a\,0\,0)$, $P_4\,(0\,a\,0)$, $P_5\,(0\,0\,a)$ sind durch die Stäbe (1 2) (2 3) (3 4) (4 5) (5 1) verbunden und jeder noch mit $P_6\,(x_0\,y_0\,z_0)$ und $P_7\,(x\,y\,z)$ durch einen Stab — wir haben gleich auch Koordinatenwerte beigefügt, die als Grundlagen für ein Beispiel dienen sollen.

Führt man bei diesem Fachwerk mit 7 Knotenpunkten und $3 \cdot 5 = 15 = 3 \cdot 7 - 6$ Stäben die entsprechende Rechnung durch, so erhält man die Fachwerkdeterminante hier als dreigliedrige Summe, jedes Glied ist wieder Produkt von drei Determinanten der Form $D\,(\varkappa\,\lambda\,\mu\,\nu)$. Das erste Glied wird z. B.

$$D\,(6\,3\,4\,5)\;D\,(7\,1\,2\,4)\;D\,(7\,6\,2\,3)\;D\,(7\,6\,5\,1).$$

Man beachte, daß dieser Ausdruck je vom zweiten Grad in den Koordinaten der Punkte 1 bis 5, dagegen vom dritten Grad in den Koordinaten der Punkte 6 und 7 ist! Das gilt auch für die beiden anderen Glieder, und wir haben hier deutlich das in § 1 bereits mitgeteilte, in § 4, Nr. 2 zu beweisende allgemeine Gesetz vor Augen, *daß der Grad in den Koordinaten eines Knotenpunktes gleich ist der Anzahl der von ihm ausgehenden Stäbe, vermindert um zwei Einheiten.*

Wir bedienen uns jetzt der von Reiß benützten Symbolik: Zunächst führen wir homogene Koordinaten ein durch die Beziehung

$$x_k : y_k : z_k : 1 = x_{1k} : x_{2k} : x_{3k} : x_{4k},$$

sodann schreiben wir $(\varkappa\,\lambda\,\mu\,\nu)$ für die Determinante

$$\begin{vmatrix} x_{1k} & \cdots & x_{4k} \\ x_{1\lambda} & \cdots & x_{4\lambda} \\ x_{1\mu} & \cdots & x_{4\mu} \\ x_{1\nu} & \cdots & x_{4\nu} \end{vmatrix}$$

Dann ist z. B.

$$D(6345) = (6345)\frac{1}{x_{46}x_{43}x_{44}x_{45}},$$

und wir können zufolge des mitgeteilten Aufbaus der Determinante aus allen drei Gliedern der Entwickelung den Faktor

$$(x_{41}x_{42}x_{43}x_{44}x_{45})^{-1}(x_{46}x_{47})^{-3}$$

abspalten. Die Gleichung $D = 0$ nimmt damit die übersichtliche Normalform an:

$$\begin{aligned}(1)\qquad &(6345)(7124)(7623)(7651)\\ &+(6451)(7512)(7634)(7623)\\ &+(6234)(7123)(7651)(7645) = 0.\end{aligned}$$

Man erhält also, wenn $P_1 \cdots P_6$ festgehalten werden, als „gefährlichen Ort" für P_7 eine Fläche dritter Ordnung F_3; auf ihr muß P_7 liegen, wenn das Dekaeder „wackelig" sein soll. P_6 ist ein konischer Punkt der Fläche, und zwar erhält man die Gleichung des Berührungskegels daselbst, wenn man jedesmal in der zweiten Klammer 7 (bzw. $x_{17}, x_{27}, x_{37}, x_{47}$) ersetzt durch 6 ($x_{16}\,x_{26}\,x_{36}\,x_{46}$). — Geschrieben in den rechtwinkligen Koordinaten, die als Grundlage bei dem Beispiel gewählt wurden, wird die Gleichung der F_3:

$$\begin{aligned}&(y-z)(x_0y-y_0x)(x_0+y_0-z_0-a)(x(a-y_0-z_0)-x_0(a-y-z))\\ &+(z-x)(x_0y-y_0x)(x_0+y_0+z_0-a)((x-a)(y_0-z_0)\\ &\qquad-(x_0-a)(y-z))\\ &+(x-y)x_0(z_0(a-x-y)-z(a-x_0-y_0))((x-a)(y_0-z_0)\\ &\qquad-(x_0-a)(y-z)) = 0.\end{aligned}$$

Wir kehren zur allgemeinen Untersuchung zurück und heben nochmals hervor, daß wir die Koordinaten der Punkte P_1 bis P_6 als fest gegeben, nur die von P_7 als veränderlich betrachten.

Bei der Aufstellung von (1) wurden die Ecken des Stabdreiecks (126) nicht variiert, genau wie oben beim Oktaeder die Punkte 1, 2, 5. Daraus ergibt sich auch hier eine gewisse Unsymmetrie der Gleichung. Man müßte aber notwendig zu

genau derselben Lagebeziehung gelangen, wenn man statt der Ecken von (1 2 6) die von (2 3 6), (3 4 6), (4 5 6) oder (5 1 6) festhalten würde.[1]) Hieraus folgt:

Zyklische Vertauschung von 1, 2, 3, 4, 5 *kann nur die Form der Gleichung* (1) *ändern.*

Das ist im folgenden zu berücksichtigen, wo diese äquivalenten Formen der Gleichung des gefährlichen Ortes F_3 für P_7 gelegentlich herangezogen werden müssen.

Die Gleichung (1) stellt, wie schon bemerkt wurde, eine F_3 mit Knotenpunkt in P_6 dar. Die Gleichung ist erfüllt, wenn

$$(7\,1\,2\,3) = (7\,1\,2\,4) = (7\,5\,1\,2) = 0,$$

also liegt die Gerade g_{12} auf der F_3; dasselbe gilt für die Geraden g_{23}, g_{34}, g_{45}, g_{51}.

Auch die weiteren 16 Geraden der F_3 sind aus der Gleichungsform abzulesen. Die Gleichung (1) ist erfüllt für

$$(7\,6\,2\,3) = (7\,6\,4\,5) = 0,$$

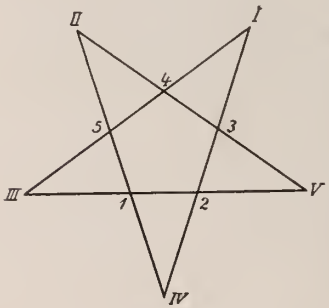


Fig. 3

also enthält die F_3 die fünf Geraden I (II, III, IV, V) durch den Knotenpunkt P_6, in denen die Ebenenpaare einander schneiden, die P_6 und je zwei nicht benachbarte Geraden des Fünfecks enthalten. (Vgl. die schematische Figur 3.)

Von den zehn bisher angegebenen Geraden der Fläche liegen je drei in den Ebenen $E_{612} \ldots E_{651}$.

Je eine weitere Gerade liegt noch in den fünf Ebenen $E_{123}, E_{234} \ldots E_{512}$ und wir können die Ebenen $\overline{E}_2, \overline{E}_3 \ldots \overline{E}_1$

[1]) Es ist eine nützliche Übung, dies an dem gegebenen Beispiel zu bestätigen. Allgemein wäre es durch die Untersuchung des analytischen Zusammenhangs zwischen den verschiedenen Formen von (1) zu bestätigen und wegen weiterer Spezialfälle, die durch identisches Verschwinden von Faktoren sich auszeichnen, nachzuprüfen.

unschwer angeben, die durch ihre Schnitte mit $E_{123}\ldots$ diese fünf Geraden h_2, $h_3\ldots h_1$ bestimmen und überdies P_6 enthalten. Der Schnitt von E_{123} mit der F_3 liegt z. B., wie aus (1) zu entnehmen ist, teils auf E_{623}, also

$$(7\,6\,2\,3) = 0,$$

teils auf der F_2

$$(2)\quad (6\,3\,4\,5)\,(7\,1\,2\,4)\,(7\,6\,5\,1) + (6\,4\,5\,1)\,(7\,5\,1\,2)\,(7\,6\,3\,4) = 0.$$

An Stelle der Gleichung der Ebene E_{123} oder

$$(7\,1\,2\,3) = 0$$

kann man aber auch setzen

$$\frac{(7\,1\,2\,4)}{(4\,1\,2\,3)} = \frac{(7\,5\,1\,2)}{(5\,1\,2\,3)}.$$

Setzt man diese Proportion in (2) ein, so erkennt man, daß die dritte, außer g_{12} und g_{23} noch in E_{123} gelegene, der F_3 angehörige Gerade h_2 zugleich auf der durch P_6 gehenden Ebene E_2 liegt, die durch

$$(3)\quad (6\,3\,4\,5)\,(4\,1\,2\,3)\,(7\,6\,5\,1) + (6\,4\,5\,1)\,(5\,1\,2\,3)\,(7\,6\,3\,4) = 0$$

gegeben ist, und die, nebenbei bemerkt, II enthält.

Fünf Gerade der F_3 liegen dann noch in den Ebenen (I II), (II III), (III IV), (IV V), (V I).

Schließlich fehlt bei dieser Ableitung, die, von P_6 und dem Fünfeck ausgehend, fünfzehn weitere Gerade der F_3 erkennen läßt, noch die letzte, wieder P_6 enthaltende Gerade VI. Sie ist gemeinsame Achse der Ebenen $\overline{E}_1\ldots\overline{E}_5$ und läßt sich darstellen durch die Proportion:

$$(4)\quad \begin{aligned}&(7\,6\,1\,2):(7\,6\,2\,3):(7\,6\,3\,4):(7\,6\,4\,5):(7\,6\,5\,1)\\ &\quad = \lambda_{12}:\lambda_{23}:\lambda_{34}:\lambda_{45}:\lambda_{51}.\end{aligned}$$

Hierin ist zu setzen

$$\lambda_{51} = (6\,4\,5\,1)\,(6\,5\,1\,2)\,(5\,1\,2\,3)\,(6\,2\,3\,4),$$

und die anderen λ gehen daraus durch zyklische Vertauschung hervor.

Eine Abzählung zeigt übrigens (vgl. die folgende Nummer), daß die F_3 mit Knotenpunkt P_6 durch die fünf Geraden $g_{12} \ldots g_{51}$, die auf ihr liegen sollen, vollständig bestimmt ist. Demnach lautet das Ergebnis:

Ein Fachwerk von besonderem Dekaedertypus sei gegeben, bestehend aus den fünf Stäben eines windschiefen Fünfecks 1 2 3 4 5 *und den zehn Stäben, die die Ecken mit zwei weiteren Punkten* 6 *und* 7 *verbinden.*

Der gefährliche Ort für 7 *ist dann die F_3, die* 6 *zum Knotenpunkt hat und die fünf Geraden $g_{12} \ldots g_{51}$ enthält.*

Wir dürfen nochmals hervorheben:

Die aus der Forderung der „Wackeligkeit" des Dekaeders erhaltene Form der Flächengleichung (1) *gestattet es, die Eigenschaften der F_3 einheitlich abzuleiten.*

Auf jeden Fall ist hiermit ein Beitrag zu dem von F. Engel a. a. O. (Graßmann III, 2, Seite 108) aufgestellten Programm gegeben, wo in diesem Zusammenhang der Name von M. Reiß leider nicht genannt ist.

Eine Ausartung sei noch erwähnt: Liegen 1 2 3 4 5 in einer Ebene, so zerfällt der gefährliche Ort in diese Ebene und den Kegel zweiter Ordnung mit dem Scheitelpunkt 6, der noch die fünf Nebenecken des Fünfecks (1 2 3 4 5) enthält. Auf alle Ausartungen kann an dieser Stelle unmöglich eingegangen werden.

3. Verallgemeinerung. Es liegt nunmehr nahe, zu untersuchen, welche Fläche der gefährliche Ort für den Knotenpunkt P_{n+2} des Fachwerks vom Typus der n-seitigen Doppelpyramide wird. Dieses Fachwerk besteht aus $n + 2$ Knotenpunkten und $3n = 3(n + 2) - 6$ Stäben,

$$\begin{aligned} &P_\nu P_{\nu+1} && (\nu = 1, 2, \ldots n-1)\\ &P_n P_1 &&\\ &P_i P_{n+1} && (i = 1, 2 \ldots n)\\ &P_i P_{n+2}. && \end{aligned}$$

Zu erwarten ist als gefährlicher Ort eine Fläche F_{n-2} mit $(n - 3)$-fachem Knotenpunkt P_{n+1}, also ein sogenanntes

Homaloïd. Diese Fläche wird die n Geraden $g_{12}, g_{23} \ldots g_{n1}$ enthalten, außerdem wahrscheinlich noch (mindestens)

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

Gerade durch P_{n+1}, entsprechend den in Nr. 2 angegebenen Geraden I bis V für den Fall $n = 5$. Die Geraden sind zu erhalten als Schnitte der Ebenen, die durch den Knotenpunkt und die Geraden $g_{12} \ldots g_{n1}$ gehen[1]), die Träger der Seiten des n-ecks sind. Von den so erhaltenen Schnittgeraden sind aber alle fortzulassen, die P_{n+1} mit einer der Ecken des n-ecks verbinden. Verfährt man so, dann stimmt die Abzählung, außerdem bleibt man in Einklang mit den vollständig untersuchten Spezialfällen ($n = 4$, $n = 5$).

Eine Fläche n-ter Ordnung hat

$$f_n - 1 = \frac{n}{6}(n^2 + 6n + 11)$$

wesentliche Konstanten, eine F_{n-2} also

$$f_{n-2} - 1 = \frac{n-2}{6}(n^2 + 2n + 3).$$

Ein seiner Lage im Raume nach vorgeschriebener Knotenpunkt m-ter Ordnung legt

$$\frac{m}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{6}$$

Konstanten der Fläche fest; in unserm Fall wäre $m = n - 3$ zu setzen.

Wenn nun die F_{n-2} außerdem die n Geraden $g_{12} \ldots g_{n1}$ enthält, so enthält sie zunächst die Punkte $P_1 \ldots P_n$, außerdem aber ist zu verlangen, daß sie von jeder Geraden noch je $n - 3$ weitere Punkte enthält, damit die Geraden völlig auf der F_{n-2} verlaufen. Dadurch wären dann weitere

[1]) Daß die namhaft gemachten Geraden dem gefährlichen Ort angehören, müßte sich auch direkt graphostatisch erkennen lassen.

$$n(n-2)$$

Konstanten festgelegt. Da nun

$$n(n-2) + \frac{n-3}{3} + \frac{(n-3)^2}{2} + \frac{(n-3)^3}{6}$$
$$= \frac{n-2}{6}(n^2 + 2n + 3),$$

so stimmt diese Abzählung zu der Vermutung über den gefährlichen Ort.

Aber auch eine dritte Abzählung steht damit in Einklang.

Bei Ausartung, dann also, wenn das n-seit in einer Ebene liegt, ist der Zerfall der Fläche in diese Ebene und einen Kegel $(n-3)$-ter Ordnung zu erwarten, dessen Scheitelpunkt P_{n+1} ist. Der in einer P_{n+1} nicht enthaltenden Ebene E gelegene Schnitt C_{n-3} dieses Kegels müßte die Schnittpunkte dieser Ebene mit den oben genannten $\frac{n(n-3)}{2}$ Geraden durch P_{n+1} enthalten und durch sie bestimmt sein, hiermit ist in Einklang

$$\frac{n(n-3)}{2} = c_{n-3} - 1.$$

[Schneiden wir die F_{n-2} mit einer den Knotenpunkt P_{n+1} nicht enthaltenden Ebene E, so ist diese Schnittkurve durch

$$c_{n-2} = \frac{(n-1)n}{2}$$

Punkte überbestimmt. (So sind z. B. die Schnittpunkte der *sechs* Kanten des Oktaeders (§ 2, 2) mit einer Ebene auf einer C_2 gelegen.) Außer den n Schnittpunkten von E mit $g_{12} \ldots g_{n1}$ kommen ja noch die Schnittpunkte mit den oben angegebenen $\frac{n(n-3)}{2}$ Geraden durch P_{n+1} hinzu, und in der Tat ist

$$n + n\frac{(n-3)}{2} = \frac{(n-1)n}{2} = c_{n-2}].$$

Diese dreierlei Abzählungen sprechen dafür, daß der gefährliche Ort für P_{n+2} tatsächlich die F_{n-2} mit $(n-3)$-fachem Knotenpunkt P_{n+1} ist, die die Geraden $g_{12} \ldots g_{n1}$ enthält und noch die c_{n-3} genannten Geraden durch P_{n+1}.

Für diese Klasse von Homaloïden wäre dann noch folgende *Reziprozität* zu erweisen, die daraus zu erschließen ist, daß in der Bedingung für die „Wackeligkeit" die Punkte P_{n+1}, P_{n+2} ihre Rollen vertauschen können aus rein geometrischen Gründen.

Es sei P_{n+2} ein auf dem durch das n-Eck $P_1 \ldots P_n$ und den $(n-3)$-fachen Knotenpunkt P_{n+1} bestimmten gefährlichen Ort F_{n-2} gelegener Punkt, dann liegt umgekehrt P_{n+1} auf dem durch P_{n+2} und das n-Eck bestimmten gefährlichen Ort F_{n-2}.

Dieser (für $n = 4$ noch triviale) Satz zeigt, wie überhaupt jede der vorausgegangenen Betrachtungen, die heuristische Tragweite der von Möbius, Cremona u. a. geschaffenen Verbindung von Statik und Geometrie, die sich auch in der Flächentheorie bewährt hat.

§ 4. Die Invarianz der Fachwerkdeterminante.

1. Raumfachwerke mit einem Stabdreieck. Die folgende Untersuchung befaßt sich mit der Feststellung des Ausnahmefalls bei Fachwerken, die mindestens ein eigentliches, nicht zu einer Strecke zusammenschrumpfendes *Stabdreieck* enthalten, sie gilt also insbesondere für Dreiecksflechtwerke.

Übrigens zeigt die einschlägige Literatur, daß wohl nur Fachwerke behandelt worden sind, bei denen diese Voraussetzung zutrifft.

Andersartige Fachwerke lassen sich unschwer angeben. Man erhält z. B. ein Fachwerk ohne Stabdreieck, wenn man vier Punkte mit sechs weiteren Punkten durch Stäbe verbindet; dann ist $k = 10$, $s = 4 \cdot 6 = 24 = 3k - 6$, ohne daß ein Stabdreieck auftritt. Von solchen Fällen sehen wir ab.

Durch diese Beschränkung sollte erreicht werden, daß das zu untersuchende Fachwerk an Freiheitsgraden der inneren

Beweglichkeit nicht verliert, wenn man drei Punkten, nämlich den Ecken des Stabdreiecks feste Koordinaten zuweist, dafür aber die drei Bedingungen fortläßt, die die Forderung unveränderter Länge der drei Seiten analytisch wiedergeben. Es bleiben dann also für die $3k - 9$ Koordinatenvariationen der $k - 3$ übrigen Punkte genau $3k - 9 = s - 3$ lineare homogene Gleichungen übrig, deren Determinante zu untersuchen ist.

Gewiß ist die Verminderung der Koordinatenvariationen um neun Stücke „im allgemeinen" gestattet, jedoch bleibt die Frage zu erörtern: Gegeben sei ein Raumfachwerk ($s = 3k - 6$), das zum mindesten einen Freiheitsgrad der inneren Beweglichkeit besitzt. Ist es immer (durch Stabvertauschung) möglich, drei Knotenpunkte festzulegen und dafür drei Bedingungen fortzulassen, ohne daß der Freiheitsgrad verloren geht? Aber die Beantwortung dieser Frage würde sich in Spezialuntersuchungen zersplittern.

Bei ebenen Fachwerken ($s = 2k - 3$) tritt diese formale Schwierigkeit überhaupt nicht ein, denn sie verlieren keinen Freiheitsgrad der inneren Beweglichkeit, wenn man beide Endpunkte eines Stabes festhält. Dann ist nur noch die Determinante von

$$s - 1 = 2k - 4$$

linearen homogenen Gleichungen zwischen $2(k - 2)$ Koordinatenvariationen zu untersuchen[1]).

Die Beweisführung der Sätze, die in den drei folgenden Abschnitten für Raumfachwerke bewiesen werden, verläuft

---

[1]) Als Beispiel führen wir das bekannte, von Müller-Breslau zuerst untersuchte Beispiel des ebenen Fachwerks $s = 9$, $k = 6$ an, das aus einem Sechseck mit drei Diagonalen (14), (25), (36) besteht. Läßt man bei der kinematischen Untersuchung die Bedingung $\delta r_{12} = 0$ fort und setzt $\delta x_1 = \delta y_1 = \delta x_2 = \delta y_2 = 0$, so erhält man als Determinante der übrigen Gleichungen

$$D = (136)(145)(234)(256) - (134)(156)(236)(245),$$

wobei $(\varkappa \lambda \mu)$ der doppelte Inhalt des Dreiecks mit den Ecken $\varkappa, \lambda, \mu$ ist. $D = 0$ weist bei Festhaltung von fünf Punkten dem sechsten als gefährlichen Ort einen Kegelschnitt zu, und D ist geradezu das Reißsche Flächenprodukt von sechs Punkten (Reiß, a. a. O., S. 401).

für ebene Fachwerke genau so wie bei räumlichen und kann ausgelassen werden.

2. Projektive Transformationen. Wie dies zuvor in speziellen Beispielen ausgeführt worden ist (§ 3, Nr. 1 und 2), so wollen wir uns jetzt beim allgemeinen Fachwerk ($s = 3k - 6$) die Determinante der $s - 3$ Gleichungen für $3k - 9$ Koordinatenvariationen, die nach Auslassung eines Stabdreiecks übrig bleiben, der Laplaceschen Entwickelung unterworfen denken.

Wir erhalten dann

$$D = \Sigma \Pi (D(\varkappa \lambda \mu \nu)), \tag{1}$$

wobei die Faktoren Determinanten sind von der in § 3, Nr. 1 angegebenen Form; jedes Produkt enthält $k - 3$ Faktoren. Der Grad von D in den $3k$ Koordinaten ist dann $3k - 9$.

Diesen Grad können wir noch in anderer Weise abzählen. Es sei $\sigma_1 [\sigma_\varkappa]$ die Anzahl der vom Punkte $P_1 [P_\varkappa]$ ausgehenden Stäbe, $g_1 [g_\varkappa]$ der Grad von D in den Koordinaten des Punktes $P_1 [P_\varkappa]$. Dann ist, das wollen wir für P_1 und damit allgemein für $P_\varkappa$ nachweisen

$$g_\varkappa \leq \sigma_\varkappa - 2 \qquad (k = 1, 2, \ldots k). \tag{2}$$

Um dies zu zeigen, bezeichnen wir für den Augenblick die mit P_1 durch Stäbe verbundenen Punkte durch $P_2 \ldots P_m$ ($m = \sigma_1 + 1$). Wenn nun P_1 keiner der bei der Variation festgehaltenen Punkte ist, so gilt folgende Überlegung, bei der wir uns wieder der in § 3, Nr. 1 benützten Symbolik bedienen: Die erste Reihe wird, mit Zusammenfassung der drei ersten Glieder

$$\begin{matrix} r_{21} \\ r_{31} \\ \vdots \\ r_{m1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0, \end{matrix}$$

außerdem kommt in der ersten Zeile noch einmal die Folge r_{12}, also $x_2 - x_1 \;\; y_2 - y_1 \;\; z_2 - z_1$ vor, in der zweiten Zeile noch

einmal r_{13} usw., doch stehen diese Folgen niemals untereinander. Ferner ist jede Determinante

$$\begin{vmatrix} r_{\varkappa 1} \\ r_{\lambda 1} \\ r_{\mu 1} \end{vmatrix}$$

vom ersten Grad in den Koordinaten des Punktes P_1, und jede Determinante

$$\begin{vmatrix} r_{1\varkappa} \\ r_{\nu\varkappa} \\ r_{\varrho\varkappa} \end{vmatrix}$$

ebenfalls. Demnach ist jedes einzelne Produkt, das in der Entwickelung (1) als Glied auftritt, in den Koordinaten des Punktes P_1 höchstens vom Grade

$$1 + m - 4 = \sigma_1 - 2,$$

also wird

$$g_1 \leqq \sigma_1 - 2.$$

Wäre P_1 ein nicht variierter Punkt, so würden die $r_{\varkappa 1}$ überhaupt nicht vorkommen, nur die $r_{1\varkappa}$, und zwar in $\sigma_1 - 2$ verschiedenen Zeilen, also kommt man hier zu demselben Ergebnis

$$g_1 \leqq \sigma_1 - 2.$$

Damit ist die Beziehung (2) bewiesen.

Um aus dieser Abzählung weitere Schlüsse zu ziehen, müssen wir beachten, daß jede Determinante $D(\varkappa\lambda\mu\nu)$ in den Koordinaten der Punkte vom dritten und nicht vom vierten Grade ist. Demnach muß man, um den Grad eines Gliedes der Summe D zu erhalten, die durch Addition der Grade $g_\varkappa$ erhaltene Summe mit $3 : 4$ multiplizieren und erhält

$$\Sigma g_\varkappa = \tfrac{4}{3}(3k - 9) = 4k - 12. \tag{3}$$

Ferner ist die über alle Knotenpunkte erstreckte Summe

$$\Sigma \sigma_\varkappa = 2s = 6k - 12, \tag{4}$$

denn in dieser Summe wird jeder Stab zweimal mitgezählt, seinen beiden Endpunkten entsprechend.

Aus (2) und (4) folgt also

$$\Sigma g_\varkappa \leqq \Sigma \sigma_\varkappa - 2k = 4k - 12, \tag{5}$$

und hier gilt das erste Gleichheitszeichen nur, wenn in (2) überall das Gleichheitszeichen gilt. Dann zeigt aber der Vergleich von (3) und (5), daß nur diese Möglichkeit besteht, und damit ist also bewiesen, daß jedes einzelne Glied der Laplaceschen Entwickelung (1) in den Koordinaten des Punktes $P_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots k$) genau vom Grad $\sigma_\varkappa - 2$ ist, wobei $\sigma_\varkappa$ die Anzahl der von diesem Punkte ausgehenden Stäbe ist.

Nunmehr können wir homogenisieren[1]), wir setzen wie oben (§ 3, Nr. 2)

$$x_\varkappa : y_\varkappa : z_\varkappa : 1 = x_{1\varkappa} : x_{2\varkappa} : x_{3\varkappa} : x_{4\varkappa}, \tag{6}$$

und sodann D durch Multiplikation mit

$$\prod_1^k x_{4\varkappa}^{\sigma_\varkappa - 2}$$

auf die Normalform bringen

$$\Sigma (\Pi (\varkappa \lambda \mu \nu)) \tag{7}$$

mit Verwendung der Abkürzung

$$(\varkappa \lambda \mu \nu) = \begin{vmatrix} x_{1\varkappa} & x_{2\varkappa} & x_{3\varkappa} & x_{4\varkappa} \\ x_{1\lambda} & x_{2\lambda} & x_{3\lambda} & x_{4\lambda} \\ x_{1\mu} & x_{2\mu} & x_{3\mu} & x_{4\mu} \\ x_{1\nu} & x_{2\nu} & x_{3\nu} & x_{4\nu} \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Das Ergebnis ist also:

Durch Einführung homogener Koordinaten (6) *kann die Fachwerkdeterminante* (1) *auf die Normalform* (7) *gebracht werden.*

Sie ist homogen vom Grade $3k - 9$ *in den* $4k$ *homogenen Koordinaten der Knotenpunkte und homogen vom Grade* $\sigma_\varkappa - 2$ *in den homogenen Koordinaten der einzelnen Knotenpunkte* $P_\varkappa$.

---

[1]) Die vorausgehende Strukturuntersuchung, die, statt indirekt durch Ungleichheiten (2) auch direkt, aber umständlicher, durch Ränderungsprozesse geführt werden kann, war bei der Fachwerkdeterminante notwendig. Bei der Reißschen Determinante E ist die Homogenität und damit die projektive Invarianz von vorneherein selbstverständlich.

Dabei bedeutet $\sigma_\varkappa$ die Anzahl der von $P_\varkappa$ ausgehenden Stäbe.

Hieraus folgen unmittelbar zwei weitere Sätze.

1) *Die Klasse der Ausnahmefachwerke ist gegenüber projektiven Transformationen invariant.*

Bei linearen homogenen Substitutionen

$$y'_{i\varkappa} = a_{i1}\, x_{1\varkappa} + a_{i2}\, x_{2\varkappa} + a_{i3}\, x_{3\varkappa} + a_{i4}\, x_{4\varkappa}$$
$$(i = 1, 2, 3, 4;\ \varkappa = 1, 2, \ldots k)$$

wird nämlich

$$(\varkappa\lambda\mu\nu)' = |a|\,(\varkappa\lambda\mu\nu),$$

woraus der Satz folgt, daß zunächst D, in der Form (7) geschrieben, eine Invariante ist, und hierin ist die vorangestellte Behauptung mit enthalten.

Außer bekannten Beispielen von ebenen „wackeligen" Fachwerken war es gerade Blaschkes „wackeliges" Achtflach, dessen genauere Strukturuntersuchung zu der Vermutung führte, daß in der „Wackeligkeit" eine projektiv invariante Eigenschaft vorliegt, die über den Rahmen der „Affingeometrie" hinausgeht.

Man kann den Satz zu verschiedenen Zwecken benützen, mit seiner Hilfe z. B. aus Fachwerken, die ohne weiteres als Mechanismen zu erkennen sind (vgl. § 1), wackelige Fachwerke ableiten.

2) *Hält man im Fachwerk alle Knotenpunkte bis auf einen einzigen $P_\varkappa$ fest, so ist der gefährliche Ort für diesen Punkt, d. h. die Fläche, an die $P_\varkappa$ gebunden ist, wenn das Fachwerk beständig Ausnahmefachwerk bleiben soll, eine Fläche von der Ordnung*

$$g_\varkappa = \sigma_\varkappa - 2.$$

Bei ebenen Fachwerken[1]) gilt der Satz 1 genau so, in den Aussagen des zweiten Satzes tritt an Stelle der Fläche von der Ordnung $\sigma_\varkappa - 2$ eine Kurve von der Ordnung $\sigma_\varkappa - 1$.

[1]) Vgl. hierzu das oben in der Fußnote besprochene Beispiel von Müller-Breslau.

3. Projektive Maßbestimmung. Es sei im Raume (x, y, z) eine projektive Maßbestimmung eingeführt unter Zugrundelegung der nicht ausgearteten Fläche zweiten Grades

$$(9) \quad F(x,y,z) \equiv x f_1(x,y,z) + y f_2(x,y,z) + z f_3(x,y,z) + f_4(x,y,z) = 0.$$

Dabei ist gesetzt

$$a_{i1}\, x + a_{i2}\, y + a_{i3}\, z + a_{i4} = f_i(x,y,z)$$

und es ist

$$a_{ik} = a_{ki}.$$

Wir führen noch die Abkürzungen ein

$$(10) \quad \begin{gathered} F(x_\nu, y_\nu, z_\nu) = F_{\nu\nu}, \\ f_{i\nu} = f_i(x_\nu, y_\nu, z_\nu) \\ F_{\mu\nu} = x_\mu f_{1\nu} + y_\mu f_{2\nu} + z_\mu f_{3\nu} + f_{4\nu} \\ = x_\nu f_{1\mu} + y_\nu f_{2\mu} + z_\nu f_{3\mu} + f_{4\mu} = F_{\nu\mu}. \end{gathered}$$

Dann ist bekanntlich in der durch die Fundamentfläche (9) gegebenen projektiven Maßbestimmung die (nichteuklidische) Entfernung r'_{12} der Punkte $P_1\, P_2$ bis auf einen von den Koordinaten unabhängigen Faktor gleich dem Logarithmus des Quotienten der beiden Wurzeln der Gleichung

$$F_{11} + 2\lambda F_{12} - \lambda^2 F_{22} = 0.$$

Setzt man also

$$\sqrt{F_{11} F_{22} - F_{12}^2} = W_{12},$$

so wird

$$d r'_{12} = \frac{d(F_{12} + W_{12})}{F_{12} + W_{12}} - \frac{d(F_{12} - W_{12})}{F_{12} - W_{12}}$$

und für

$$d r'_{12} = 0$$

kann man schreiben

$$F_{12}\, d\, W_{12} - W_{12}\, d\, F_{12} = 0$$

oder

$$2 F_{11} F_{22}\, d F_{12} - F_{11} F_{12}\, d F_{22} - F_{22} F_{12}\, d F_{11} = 0.$$

Diese Gleichung denken wir uns nach den Differentialen der Koordinaten von P_1 und P_2 geordnet, also in der Form

$$X_{12}\,dx_1 + Y_{12}\,dy_1 + Z_{12}\,dz_1 + X_{21}\,dx_2 + Y_{21}\,dy_2 + Z_{21}\,dz_2 = 0$$

geschrieben; hierin ist also

$$X_{12} = 2F_{11}F_{22}\frac{\partial F_{12}}{\partial x_1} - F_{22}F_{12}\frac{\partial F_{11}}{\partial x_1},$$

. . . . . .

$$X_{21} = 2F_{11}F_{22}\frac{\partial F_{12}}{\partial x_2} - F_{11}F_{12}\frac{\partial F_{22}}{\partial x_2},$$

. . . . . .

Um jetzt den (kinematischen!) Ausnahmefall zu erhalten, haben wir zu fordern, daß aus $s-3$ der Gleichungen

$$dr'_{\mu\nu} = 0$$

oder

$$X_{\mu\nu}\,dx_\mu + Y_{\mu\nu}\,dy_\mu + Z_{\mu\nu}\,dz_\mu + X_{\nu\mu}\,dx_\nu + Y_{\nu\mu}\,dy_\nu + Z_{\nu\mu}\,dz_\nu = 0 \tag{11}$$

sich die $dx_\mu : dy_\mu : dz_\mu$ (mit Auslassung der Ecken des festgehaltenen Stabdreiecks) als nicht sämtlich zu Null werdende Differentiale bestimmen lassen.

Ähnlich wie oben erhalten wir (statt (1)) die Determinante

$$D' = \Sigma\Pi(D'(\varkappa\lambda\mu\nu)) \tag{12}$$

wobei noch zu setzen ist

$$D'(\varkappa\lambda\mu\nu) = \begin{vmatrix} X_{\varkappa\lambda} & Y_{\varkappa\lambda} & Z_{\varkappa\lambda} \\ X_{\varkappa\mu} & Y_{\varkappa\mu} & Z_{\varkappa\mu} \\ X_{\varkappa\nu} & Y_{\varkappa\nu} & Z_{\varkappa\nu} \end{vmatrix}. \tag{13}$$

Diese Determinanten sind noch umzuformen, um sie mit den $D(\varkappa\lambda\mu\nu)$ zu vergleichen. Dabei schreiben wir der Einfachheit halber 1234 statt der griechischen vier Buchstaben. Man sieht zunächst, daß aus den Zeilen von $D'(1234)$ die Faktoren F_{22}, F_{33} und F_{44} herausgestellt werden können. Sodann ist geeignete Ränderung anzuwenden; sie ergibt

$$F_{11} D'(1234) = F_{22} F_{33} F_{44} \begin{vmatrix} F_{11} & 0 & 0 & 0 \\ F_{12}\, 2\, F_{11} \dfrac{\partial F_{12}}{\partial x_1} - F_{12} \dfrac{\partial F_{11}}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \\ F_{13}\, 2\, F_{11} \dfrac{\partial F_{13}}{\partial x_1} - F_{13} \dfrac{\partial F_{11}}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_{14}\, 2\, F_{11} \dfrac{\partial F_{14}}{\partial x_1} - F_{14} \dfrac{\partial F_{11}}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \end{vmatrix}$$

Hier multipliziert man die erste Reihe mit

$$\frac{\partial F_{11}}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial F_{11}}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial F_{11}}{\partial z_1}$$

und addiert zu den drei folgenden Reihen. Sodann dividiert man diese Reihen je durch 2 und setzt den Faktor 8 heraus. Endlich multipliziert man die drei letzten Reihen mit

$$-x_1, \quad -y_1, \quad -z_1$$

und addiert zu ersten. Es kommt dann

$$D'(1234) = 8 F_{11}^2 F_{22} F_{33} F_{44} \begin{vmatrix} f_{11} & f_{21} & f_{31} & f_{41} \\ f_{12} & f_{22} & f_{32} & f_{42} \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} & f_{43} \\ f_{14} & f_{24} & f_{34} & f_{44} \end{vmatrix}$$
$$= 8 |a| F_{11}^2 F_{22} F_{33} F_{44} D(1234).$$

Jetzt ist der Zusammenhang zwischen $D'(12)$ und $D(1)$ leicht zu erkennen. Multipliziert man in D die Zeile

$$\ldots x_\mu - x_\nu,\ y_\mu - y_\nu,\ z_\mu - z_\nu\ 0 \ldots \quad 0\ x_\nu - x_\mu,\ y_\nu - y_\mu,\ z_\nu - z_\mu\ 0 \ldots$$

mit $F_{\mu\mu} F_{\nu\nu}$, so gehen die Faktoren $D(\varkappa\lambda\mu\nu)$ der Laplaceschen Entwickelung von D gerade über in die $D'(\varkappa\lambda\mu\nu)$, wenn man von dem Faktor $8|a|$ absieht. Im übrigen unterscheidet sich dann D' von D nur von dem Faktor

$$\Pi(F_{\mu\mu}^M),$$

wobei M die Anzahl der von P_μ ausgehenden Stäbe (also σ_μ) bedeutet, wenn P_μ kein festgehaltener Punkt ist; in diesem Falle aber hat man $\sigma_\mu - 2$ einzusetzen. Im ganzen ist der

Faktor, der D' von D unterscheidet, unwesentlich; er ist von Null verschieden, da wir selbstverständlich die Fundamentalfläche durch keinen der Knotenpunkte legen.

Es ergibt sich also der Satz:

Führt man im (euklidischen) Raum (x, y, z) des Fachwerks eine projektive (nichteuklidische) Maßbestimmung ein — mit Verwendung einer Fundamentalfläche, die keinen Knotenpunkt des Fachwerks enthält — so bleibt dabei der kinematische Charakter des Fachwerks erhalten.

Es ist also für beide Maßbestimmungen, die euklidische und die nichteuklidische, gleichzeitig „wackelig" oder nicht.

4. Kinematischer und statischer Ausnahmefall. Wie schon in § 1 erwähnt worden ist, gilt die bekannte Analogie zwischen Statik und Kinematik (Zusammensetzung der Kräfte in einem Punkt und der infinitesimalen Rotationen) auch in der nichteuklidischen Geometrie. Aber es bedarf doch noch eines Beweises, daß auch bei projektiver Maßbestimmung kinematischer und statischer Ausnahmefall sich völlig decken.

Die Grundlagen für diesen Beweis sind übrigens gleichfalls in der in § 1 angeführten Arbeit von Lindemann gegeben.

Wenn auf die beiden Endpunkte eines Stabes $(\mu\nu)$ Kräfte wirken, so leisten sie bei einer infinitesimalen Ortsänderung eine Arbeit

$$\begin{aligned}(14)\qquad &\bar{X}_{\mu\nu}\,dx_\mu + Y_{\mu\nu}\,dy_\mu + \bar{Z}_{\mu\nu}\,dz_\mu + \bar{X}_{\nu\mu}\,dx_\nu + \bar{Y}_{\nu\mu}\,dy_\nu \\ &+ \bar{Z}_{\nu\mu}\,dz_\nu.\end{aligned}$$

Gehen von dem Punkt P_1 die Stäbe $r_1, \ldots r_{1\sigma_1}$ aus, so wird von ihnen an P_1 die Arbeit geleistet

$$\begin{aligned}&(\bar{X}_{11} \ldots + \bar{X}_{1\sigma_1})\,dx_1 + (\bar{Y}_{11} + \ldots \bar{Y}_{1\sigma_1})\,dy_1 \\ &+ (\bar{Z}_{11} \ldots + \bar{Z}_{1\sigma_1})\,dz_1.\end{aligned}$$

Wenn diese Kräfte Gelenkdrücke sind, die keine äußere Resultante haben, so ist die Arbeit für jede Verschiebung gleich Null, also

$$\begin{aligned} \bar{X}_{11} + \ldots + \bar{X}_{1\sigma_1} &= 0, \\ \bar{Y}_{11} + \ldots + \bar{Y}_{1\sigma_1} &= 0, \\ \bar{Z}_{11} + \ldots + \bar{Z}_{1\sigma_1} &= 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Wegen (11) und (14) nimmt dann das Prinzip der virtuellen Verrückungen die Form an:

$$\begin{aligned} &\Sigma(\bar{X}_{\mu\nu}\delta x_\mu + \ldots + \bar{Z}_{\nu\mu}\delta z_\mu) \\ &= \Sigma\varrho_{\mu\nu}(X_{\mu\nu}\delta x_\mu + \ldots + Z_{\nu\mu}\delta z_\nu), \end{aligned} \tag{16}$$

also ist wegen (15)

$$\begin{aligned} \Sigma\varrho_{\mu\nu}X_{\mu\nu} &= 0, \\ \Sigma\varrho_{\mu\nu}Y_{\mu\nu} &= 0, \quad (S_{\mu\nu} = S_{\nu\mu}) \\ \Sigma\varrho_{\mu\nu}Z_{\mu\nu} &= 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Die Summen sind so zu verstehen: Der Index μ ist in jeder Summe fest und nimmt der Reihe nach die Werte $1, 2 \ldots k$ an, und der Index ν durchläuft für $\mu = 1$ der Reihe nach die Werte $1, 2 \ldots \sigma_1$; entsprechend für die anderen Indices. Man hat also für $s = 3k - 6$ Multiplikatoren im ganzen $3k$ Gleichungen. Es muß also jede $(3k - 6)$-reihige Determinante der, so dürfen wir sie wohl nennen, *statischen Matrix* des Fachwerks von $3k - 6$ Reihen und $3k$ Zeilen zu Null werden. Die *kinematische Matrix*, die man erhält, wenn man fordert, daß von den $3k$ Koordinatenvariationen entsprechend den sechs äußeren Freiheitsgraden sechs beliebige willkürlich gewählt werden dürfen, und die übrigen dann bestimmt werden können, wird nach (11) sich von der statischen Matrix nur dadurch unterscheiden, daß Reihen und Zeilen vertauscht sind.

Diese Überlegung, die parallel zu dem bekannten Beweis des Föpplschen Satzes von der Äquivalenz des statischen und des kinematischen Ausnahmefalls beim Fachwerk $s = 3k - 6$ im euklidischen Raum verläuft, zeigt uns also, *daß auch in der nichteuklidischen Geometrie der statische mit dem kinematischen Ausnahmefall sich völlig deckt.*

Die in Nr. 2 und 3 dieses Paragraphen unvermeidliche Beschränkung auf Fachwerke mit einem Stabdreieck ist also hier nicht mehr nötig.

Um diesem Ergebnis noch eine konkrete Gestalt zu geben, sei folgendes Beispiel hinzugefügt:

Liegt im euklidischen Raum irgend ein Ausnahmefachwerk vor, etwa Blaschkes „wackeliges Achtflach“ oder unser „wackeliges Dekaeder“, so erhält man daraus ein Ausnahmefachwerk im sphärischen Raum S_3 durch Zentralprojektion. Man ergänzt zunächst den R_3 zu einem euklidischen R_4 durch Hinzufügen einer vierten, auf den drei andern (x-, y-, z-Achse) im Nullpunkte senkrechten u-Achse. Auf dieser Achse nimmt man dann den Punkt M $(0, 0, 0, a > 0)$ als Mittelpunkt einer dreifach ausgedehnten Kugel S_3. Von M aus projiziert man die Knotenpunkte des Fachwerks zentral auf S_3 und wählt von den beiden Schnittpunkten eines Projektionsstrahles $M P_\mu$ mit S_3 immer den Punkt Q'_μ aus, dessen vierte Koordinaten u'_μ kleiner als a ist.

Die Q'_μ mit ihren aus Hauptkreisbögen $Q'_\mu Q'_\nu$ bestehenden, den Stäben $(\mu\,\nu)$ entsprechenden Verbindungsstücken bilden dann im S_3 ebenfalls ein Ausnahmefachwerk.

Ganz entsprechend verläuft die Konstruktion von zweidimensionalen sphärischen Ausnahmefachwerken durch Zentralprojektion ebener Ausnahmefachwerke auf eine Kugel.

Mechanismen in der euklidischen Ebene ($s = 2k - 3$) bzw. im euklidischen Raume ($s = 3k - 6$) verwandeln sich dabei selbstverständlich nur ausnahmsweise wieder in Mechanismen auf der Kugel bzw. im S_3; überhaupt scheinen derartige „sphärische Fachwerkmechanismen“, die endliche innere Beweglichkeit besitzen, noch kaum bekannt zu sein.

Die in mancher Hinsicht überraschende Feststellung, daß die erörterten Fragen der Kinematik und Statik des Fachwerks einen invarianten Charakter gegenüber der Gruppe aller pro-

jektiven Transformationen zeigen, hat ihr Gegenstück in der Flächentheorie.

Darboux hat gezeigt — und er sagt mit Recht, „il est *intéressant* de voir . . .“ —, daß man aus den infinitesimalen Verbiegungen ξ, η, ζ einer Fläche F die ξ, η, ζ aller aus F durch projektive Transformationen hervorgehenden Flächen $\bar{F}$ gewinnen kann[1]).

Eine Anwendung hiervon darf zum Schluß noch mitgeteilt werden. Es ist nachgewiesen worden, daß man die infinitesimalen Verbiegungen aller Ordnungen und damit die allgemeinste analytische Verbiegung einer Fläche rekurrierend durch Quadraturen bestimmen kann, sobald man die ξ, η, ζ kennt[2]). Da nun diese infinitesimalen Verbiegungen (erster Ordnung) für die Kugel auf verschiedenen Wegen und in verschiedener Form bestimmt worden sind[3]), so ist die Bestimmung der analytischen Verbiegungen der Flächen zweiten Grades somit auf eine Kette rekurrierender Quadraturen zurückgeführt.

---

[1]) Théorie des surfaces IV (1. Aufl. 1896), p. 78. Ein kürzerer, einheitlicher Beweis dieses Satzes durch Anwendung homogener Koordinaten wäre im Sinne der Invariantentheorie wünschenswert.

[2]) Diese Berichte (1920), S. 21—48. Bedingte Flächenverbiegungen, insbesondere Gleitverbiegungen.

[3]) Vgl. z. B. S. 36—38 der oben angeführten Arbeit.

Zur Theorie der reziproken Radien.

Von **A. Voss.**

Vorgelegt in der Sitzung am 8. Mai 1920.

Die folgenden Betrachtungen beabsichtigen, die allgemeinsten Beziehungen zwischen zwei Flächen, die vermöge der Transformation R durch reziproke Radien auseinander entspringen, zu entwickeln. Dabei hat sich eine große Zahl interessanter invarianter Gleichungen ergeben, die bisher keine Beachtung gefunden zu haben scheinen, von denen einige der wichtigsten hier angeführt werden sollen.

§ I.

Invarianten bei den Transformationen R.

Wird die auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogene Fläche $f(x, y, z) = 0$ durch die Gleichungen der Reziprozität[1])

$$1) \qquad x = \frac{x_1}{r_1^2},\ y = \frac{y_1}{r_1^2},\ z = \frac{z_1}{r_1^2};\ x_1 = \frac{x}{r^2},\ y_1 = \frac{y}{r^2},\ z_1 = \frac{z}{r^2}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,\ r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2,\ xx_1 + yy_1 + zz_1 = 1$$

in Bezug auf den Koordinatenanfang O transformiert, so entspricht jedem Punkte P von f mit den Koordinaten x, y, z ein Punkt P' mit den Koordinaten x_1, y_1, z_1 der Fläche $f_1(x_1\, y_1\, z_1) = 0$, und es ist

[1]) Von imaginären Beziehungen wird nur, so lange nicht dies besonders bemerkt wird, abgesehen. Der Kürze wegen ist $rr_1 = 1$, nicht $rr_1 = a^2$ gewählt; die letztere Annahme würde allerdings der Homogenität der Formeln mehr entsprechen.

2) $$f_1(x_1\,y_1\,z_1) = f(x\,y\,z) = 0$$

die Gleichung der letzteren. Die beiden Flächen f und f_1 werden im folgenden als Fläche P und Fläche P_1 bezeichnet.

Die aus 2) folgende Gleichung

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1}$$

nebst den analogen für die Differentialquotienten nach y_1, z_1 liefert mit Hilfe der Gleichungen 1) sofort

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x}r^2 - 2\frac{x_1}{r^4}\left(x_1\frac{\partial f}{\partial x} + y_1\frac{\partial f}{\partial y} + z_1\frac{\partial f}{\partial z}\right),$$

also für

3) $$S = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z},\quad S_1 = x_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + y_1\frac{\partial f_1}{\partial y_1} + z_1\frac{\partial f_1}{\partial z_1}$$

die Grundgleichungen der Transformation R

I)
$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= \frac{\partial f}{\partial x}r^2 - 2Sx,\\ \frac{\partial f_1}{\partial y_1} &= \frac{\partial f}{\partial y}r^2 - 2Sy,\\ \frac{\partial f_1}{\partial z_1} &= \frac{\partial f}{\partial z}r^2 - 2Sz,\end{aligned}\right.$$

also auch, da nach 1) $S_1 = -S$ ist,

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}r_1^2 - 2S_1x_1,\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f_1}{\partial y_1}r_1^2 - 2S_1y_1,\\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f_1}{\partial z_1}r_1^2 - 2S_1z_1.\end{aligned}\right.$$

Setzt man $\Sigma\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 = \Delta^2$, $\Sigma\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)^2 = \Delta_1^2$, wobei die Summation sich auf x, y, z etc. erstreckt, so folgt aus I)

$$\Delta_1^2 = \Delta^2 r^4.$$

Führt man für die Flächennormalen in den Punkten P, P_1 die Bezeichnungen X, Y, Z; X_1, Y_1, Z_1 ein, und setzt

$$\Delta_1 = \Delta r^2,$$

so hat man auch aus I)

$$\text{I a)} \qquad \begin{cases} X_1 = X - 2 S_2 \frac{x}{r^2}, \\ Y_1 = Y - 2 S_2 \frac{y}{r^2}, \\ Z_1 = Z - 2 S_2 \frac{z}{r^2} \end{cases}$$

für $S_2 = x X + y Y + z Z = \Sigma(x X)$.

In Ia) ist damit eine bestimmte Richtung der Normalen des Punktes P_1 festgesetzt, die nicht immer zweckmäßig ist. Wählt man nämlich für die Koordinaten von P und P_1 die Parameter u, v ihrer Ausdrücke auf den Flächen P und P_1 und bezeichnet ihre Differentialquotienten nach den u resp. v, uu, uv etc. durch angehängte Indizes, so daß

$$x_{1u} = \frac{x_u}{r^2} - 2\frac{x r_u}{r^3},$$

so sind die Richtungscosinus der Normale in P den Unterdeterminanten der Matrix

$$\begin{matrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{matrix}$$

proportional, und die X_1, Y_1, Z_1 proportional den Faktoren von c_1, c_2, c_3 in der Determinante

$$\Sigma = \begin{vmatrix} x_{1u} & y_{1u} & z_{1u} \\ x_{1v} & y_{1v} & z_{1v} \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Für Σ erhält man durch Ränderung mit der vierten Kolonne

$$\frac{r_u}{r^3}, \quad \frac{r_v}{r^3}, \quad 0, \quad 1$$

und geeignete Addition der Elemente derselben zu den drei ersten Kolonnen, wenn man darauf die mit $\frac{x}{r^2}$, $\frac{y}{r^2}$, $\frac{z}{r^2}$ multiplizierten drei ersten Kolonnen von der letzten abzieht,

$$\Sigma = \frac{1}{r^4}\begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u & 0 \\ x_v & y_v & z_v & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & -\left(\frac{c_1 x + c_2 y + c_3 z}{r^2}\right) \\ 2x & 2y & 2z & -1 \end{vmatrix}$$

oder, wenn $x = y_u z_v - z_u x_v : \sqrt{eq - f^2}$ etc. gesetzt wird

$$\lambda X_1 = -\frac{1}{r^4} X\sqrt{eq - f^2} + \frac{2x}{r^6}\Sigma x X \cdot \sqrt{eq - f^2}$$

und es tritt an die Stelle von I a)

$$\text{I b)} \qquad \begin{cases} X_1 = -X + 2x\Sigma\frac{xX}{r^2}, \\ Y_1 = -Y + 2x\Sigma\frac{xX}{r^2}, \\ Z_1 = -Z + 2x\Sigma\frac{xX}{r^2}. \end{cases}$$

In Bezug auf die Formeln I) ist vielleicht noch folgende Bemerkung am Platze, die sich auf die partiellen Differentialquotienten p, q; p_1, q_1 der Flächen P, P_1 bezieht, wobei

$$p\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \quad p_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial z_1} \text{ etc. ist.}$$

Man erhält dann durch Division der beiden ersten Gleichungen I) durch die dritte

$$-p_1 = -\frac{pr^2 + 2x(px + qy - z)}{r^2 + 2z(px + qy - z)},$$

$$-q_1 = -\frac{qr^2 + 2y(px + qy - z)}{r^2 + 2z(px + qy - z)}.$$

Fügt man unter der Bezeichnung $w = px + qy - z$ die Identität

$$1 = \frac{r^2 + 2zw}{r^2 + 2zw}$$

hinzu, so erhält man

$$-w_1 = -(p_1 x_1 + q_1 y_1 - z_1) = w : r^2 + 2wz,$$

also durch weitere Umrechnung

$$-p = -\frac{p_1 r_1^2 + 2x_1 w_1}{r_1^2 + 2z_1 w_1}, \quad -q = -\frac{q_1 r_1^2 + 2y_1 w_1}{r_1^2 + 2z_1 w_1}.$$

Die Einführung der p, q jedoch würde für die Untersuchungen der folgenden Paragraphen sehr weitläufige Rechnungen mit sich bringen.

Von den verschiedenen Beweisen für die Invarianz der Krümmungslinien bei der Transformation R ist wohl der aus dem Dupinschen Satze folgende, auf das dreifache Orthogonalsystem, gebildet aus f, seinen Parallelflächen und den aus den Flächennormalen längs der Krümmungslinien bestehenden beiden Developpablen bezogene folgende besonders anschaulich. Darboux gibt (Théorie générale des surfaces, I, S. 208, vgl. auch Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie, 2. Auflage, 1910, S. 110) einen anderen auf den Grundgleichungen der Flächentheorie beruhenden Beweis. Endlich kann man sich auch des Satzes (vgl. Salmon-Fiedler, Anal. Geometrie des Raumes 1863, 3. Auflage, 1880, S. 40) bedienen, daß die Richtungen der Krümmungslinien diejenigen sind, nach denen eine Kugel die Fläche stationär berührt, d. h. in einer Kurve mit Spitze durchschneidet. Hier soll der Beweis durch den direkten Nachweis der Invarianz der Gleichung der Krümmungslinien erbracht werden.

Setzt man

$$D_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \\ d\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right) \\ dx_1 \end{vmatrix}^{1}),$$

[1]) Von der Determinante D_1 und der analogen auf f bezogenen D ist nur die erste Kolonne hingeschrieben.

so daß $D_1 = 0$ die Gleichung der Krümmungslinien von $f_1 = 0$ darstellt, so hat man nach I)

$$4) \quad d\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right) = r^2 d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + 2r\,dr\,\frac{\partial f}{\partial x} - 2S\,dx - 2x\,dS$$

$$dS = df + \Sigma x\, d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \Sigma x\, d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Ändert man nun D_1 mit den Elementen der vierten Kolonne

$$S, \quad dS, \quad \frac{dr}{r^3}, \quad 1$$

und fügt dieselben mit $2x$, $2y$, $2z$ multipliziert den drei ersten Kolonnen hinzu, so wird

$$D_1 = \begin{vmatrix} d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + 2r\,dr\,\frac{\partial f}{\partial x} - 2\,dx\,S & - & - & dS \\ \frac{\partial f}{\partial x} r^2 & - & - & S \\ dx & - & - & \frac{dr}{r^3} \\ 2y & 2y & 2z & 1 \end{vmatrix}.$$

Zieht man jetzt die mit den $\frac{x}{r^2}$, $\frac{y}{r^2}$, $\frac{z}{r^2}$ multiplizierten drei ersten Kolonnen von der letzten ab, so erhalten die Elemente der letzteren, wie unmittelbar zu sehen, die Werte 0, 0, 0, -1, so daß

$$\text{II)} \qquad D_1 = -r^2 D \text{ oder } r_1 D_1 + r D = 0$$

ist. Man findet übrigens für

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ dx \\ x \end{vmatrix}, \quad J_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \\ dx_1 \\ x_1 \end{vmatrix},$$

$$J_1 = \frac{1}{r^2} J,$$

so daß auch

$$D_1 J_1 = - J D$$

eine bis aufs Vorzeichen absolute Invariante ist, zu der man noch

$$\frac{D_1}{\Delta_1} = - \frac{D}{\Delta}$$

hinzufügen kann.

Die Invariante D hat übrigens noch eine allgemeinere Bedeutung. Aus der bekannten Formel für den kürzesten Abstand δ zweier Strahlen mit den Richtungscosinus $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ und dem Neigungswinkel θ, welche von den Punkten x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 ausgehen,

$$\delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}$$

folgt für den Fall, daß $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ durch X, Y, Z; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ durch $X + dX, Y + dY, Z + dZ$ ersetzt werden

$$\delta = \begin{vmatrix} dx \\ X \\ dX \end{vmatrix} : \Omega, \text{ wo } \Omega = \sqrt{dX^2 + dY^2 + dZ^2}.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit der Determinante

$$\begin{vmatrix} X & X_u & X_v \end{vmatrix} = \sqrt{EG - F^2},$$

wobei für die Koordinaten x, y, z der Ausgangsfläche und die Richtungscosinus die Parameter u, v gewählt sind, und

$$\Sigma x_u X_u = e, \quad \Sigma x_u X_v = f_1, \quad \Sigma x_v X_u = f, \quad \Sigma x_v X_v = g$$
$$\Sigma X_u^2 = E, \quad \Sigma X_u X_v = F, \quad \Sigma X_v^2 = G$$

gesetzt ist, so erhält man

$$\delta = - \begin{vmatrix} e\,du + f\,dv & f'\,du + g\,dv \\ E\,du + F\,dv & F\,du + G\,dv \end{vmatrix} : \Omega \sqrt{EG - F^2}.$$

Diese Formel, die sich in E. Kummers Abhandlung über geradlinige Strahlensysteme (J. v. Crelle, Bd. 57) nicht findet, ist natürlich längst bekannt, aber ihre weitläufige Ableitung

in Bianchis Vorlesungen über Differentialgeometrie läßt sich, wie gezeigt, durch die Multiplikation mit der Determinante sehr vereinfachen [1]).

Setzt man voraus, daß die Ausgangsfläche x, y, z zu den Strahlen normal steht, so hat man mit der Determinante $X x_u x_v$ zu multiplizieren und erhält dann sofort bei Benutzung der gebräuchlichen Bezeichnungen für die Fundamentalgrößen erster und zweiter Ordnung e, f, g; E, F, G [2]) die Gleichung

$$\delta = \begin{vmatrix} e\,du + f\,dv, & f\,du + g\,dv \\ E\,du + F\,dv, & F\,du + G\,dv \end{vmatrix} : \sqrt{eq - f^2}\,\sqrt{dX^2 + dY^2 + dZ^2}.$$

Andererseits hat man aber auch

$$D = \Delta^2 \begin{vmatrix} X \\ dX \\ dx \end{vmatrix} = \frac{\Delta^2}{\sqrt{eq - f^2}} \begin{vmatrix} E\,du + F\,dv, & F\,du + G\,dv \\ e\,du + f\,dv, & f\,du + q\,dv \end{vmatrix},$$

also

$$\delta = \frac{D}{\Delta^2}\sqrt{dX^2 + dY^2 + dZ^2}, \quad \delta_1 = \frac{D_1}{\Delta_1^2}\sqrt{dX_1^2 + dY_1^2 + dZ_1^2},$$

so daß auch

$$\frac{\delta}{\delta_1} = -r^2 \sqrt{\frac{dX_1^2 + dY_1^2 + dZ_1^2}{dX^2 + dY^2 + dZ^2}}$$

oder, wenn man die Bogenelemente der sphärischen Abbildung der Normalensysteme der beiden durch die Transformation R zugeordneten Flächen durch Ω, Ω_1 bezeichnet,

$$\frac{\delta}{r}\Omega + \frac{\delta_1}{r_1}\Omega_1 = 0,$$

womit das Verhältnis der kürzesten Abstände je zweier unendlich benachbarter korrespondierender Normalenpaare der Flächen P und P_1 ausgedrückt ist.

---

[1]) Vgl. Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie, Leipzig, Teubner, 2. Aufl., 1910, S. 131 und 263, 264.

[2]) Diese von R. Hoppe eingeführte Bezeichnung scheint mir immer noch zweckmäßiger als die gegenwärtig meist benutzte E, F, G; L, M, N; (bei Bianchi E, F, G; $D\ D_1\ D_{11}$).

§ II.

Das charakteristische Dreieck der Transformation R.

Aus den Gleichungen I) oder Ia) folgt sofort, was übrigens auch sehr leicht geometrisch zu ersehen ist, daß die Normalen N, N_1 der Punkte P, P_1 sich in einem Punkte Q mit den Koordinaten ξ, η, ζ schneiden, der gleich weit von P und P_1 entfernt ist[1]). Dies zeigt sich sofort auch analytisch. Setzt man nämlich

$$\begin{aligned} \xi &= x + \sigma X = x_1 + \sigma_1 X_1 \\ \eta &= y + \sigma Y = y_1 + \sigma_1 Y_1 \\ \zeta &= z + \sigma Z = z_1 + \sigma_1 Z_1 \end{aligned}$$

so folgt nach § I, Ia)

$$x + \sigma X = \frac{x}{r^2} + \sigma_1 \left(X - 2 \frac{S_2 x}{r^2} \right)$$

und diese Gleichung wird zur Identität für $\sigma = \sigma_1$, wenn man zugleich $\sigma = \dfrac{1 - r^2}{2 S_2}$ setzt.

Es sind daher die Koordinaten des Punktes Q

$$\begin{aligned} \xi &= x + \frac{1 - r^2}{2 S_2} X = x + \frac{1 - r^2}{2 S} \frac{\partial f}{\partial x} \Delta \\ \eta &= y + \frac{1 - r^2}{2 S_2} Y = y + \frac{1 - r^2}{2 S} \frac{\partial f}{\partial y} \Delta \\ \zeta &= z + \frac{1 - r^2}{2 S_2} Z = z + \frac{1 - r^2}{2 S} \frac{\partial f}{\partial z} \Delta, \end{aligned} \qquad 1)$$

der mit den Punkten P und P_1 das charakteristische Dreieck bildet. Daraus folgt:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 + \frac{(1 - r^2)^2}{4 S_2^2}$$

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = \frac{(1 - r^2)^2}{4 S_2^2}$$

[1]) Diese einfache Bemerkung scheint bis jetzt übersehen zu sein. Nur in E. Pascals Repertorium, Leipzig 1902, II. S. 514 finde ich die Angabe „Bemerkenswert ist das Theorem, die Normale zu einer Kurve

oder

$$2) \qquad (OQ)^2 = 1 + (QP)^2.$$

Die um Q mit dem Radius QP beschriebene Kurve schneidet also die Einheitskugel um den Mittelpunkt O orthogonal, so daß in jedem der allerdings nicht notwendig reellen Schnittpunkte T das Dreieck OTQ bei T rechtwinklig ist.[1]) Für den Winkel $PQP_1 = \theta$ erhält man

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{S}{r\Delta}.$$

Ist daher $S : r\Delta$ eine Konstante, was für die bekannte Klasse von Flächen $P \cdot (P^1)$, bei denen die Normale einen konstanten Winkel mit dem Radiusvektor r bildet, stattfindet, so ist auch θ konstant.[2])

Im allgemeinen mag übrigens S als von Null verschieden vorausgesetzt werden. Ist S beständig gleich Null, so reduzieren sich die Flächen P, P_1 auf Kegelflächen mit der Spitze O. Ist S an einer bestimmten Stelle gleich Null, so sind die Normalen in P, P_1 parallel, d. h. der Punkt Q unendlich ferne und für $r^2 = 1$ fällt Q mit P und P_1 zusammen. Die Gleichung der Ebene PQP_1 ist in den laufenden Koordinaten Ξ, H, Z

$$3) \qquad \begin{vmatrix} \Xi & H & Z \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0.$$

in einem Punkte P und die Normale zu ihrer inversen Kurve in dem entsprechenden Punkte P_1 schneiden sich in einem Punkte des im Mittelpunkt von PP_1 auf PP_1 errichteten Lotes".

[1]) Aus der Betrachtung des Dreiecks OQP folgt noch im reellen Gebiet

$$OQ - PQ \leqq r \leqq OQ + PQ,$$

also für den speziellen weiter unten betrachteten Fall

$$OQ = \sqrt{1 + k^2},\ PQ = k,\ \sqrt{1 - k^2} - k \leqq r \leqq \sqrt{1 + k^2} + k,$$

auf S. 239.

[2]) Diese von Monge zuerst untersuchten Flächen, die übrigens auch in neuester Zeit noch weiter untersucht sind, sollen hier als Mongesche Flächen bezeichnet werden.

In sehr einfacher Weise läßt sich auch die partielle Differentialgleichung

$$4) \qquad (1 - r^2)^2 \frac{\Delta^2}{S^2} = 4k^2, \quad k = \text{konst.},$$

oder $$(1 - r^2)^2 (1 + p^2 + q^2) = 4k^2 (px + qy - z)^2$$

lösen. Unter dieser Voraussetzung ist nämlich

$$5) \qquad (OQ)^2 = 1 + k^2, \quad (PQ)^2 = k^2.$$

Die Punkte Q liegen daher auf einer Kugel (Q), die um O mit dem Radius $\sqrt{1 - k^2}$ beschrieben ist, und die Entfernung jeden Punktes P (resp. P^1) von Q ist gleich k. Nun sind drei Fälle möglich. Entweder gibt es auf (Q) zweifach unendlich viele Punkte Q dieser Art. Dann ist die Kugel (Q) Parallelfläche der Fläche P (P_1); letztere also selbst eine mit (Q) konzentrische Kugel vom Radius $k + \sqrt{1 + k^2}$ resp. $\sqrt{1 + k^2} - k$. Oder es fallen alle Punkte Q mit einem einzigen Punkte von (Q) zusammen. Dann liegen die Punkte P und P_1 auf einer um diesen Punkt mit dem Radius k beschriebenen Kugel. Oder endlich die Punkte Q bilden eine Kurve C auf (Q). Die Fläche P (P^1) ist dann eine Röhrenfläche, die durch die Enveloppe der Kugeln vom Radius k, deren Mittelpunkte auf C liegen, entsteht.

Setzt man in der Tat

$$6) \qquad \begin{gathered} f = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 - k^2 = 0 \\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 + k^2, \end{gathered}$$

so ist die Differentialgleichung 5) erfüllt, da der Ausdruck S gleich $1 - r^2$ wird. Im zweiten Falle hat man daher die vollständige Lösung mit den drei Konstanten c_1, c_2, c_3, zwischen denen die Gleichung

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1 + k^2$$

stattfindet, $f = (x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 + (z - c_3)^2 - k^2$. Der erste Fall stellt die singuläre Lösung vor; der dritte endlich gibt als allgemeine Lösung durch den gewöhnlichen Prozeß

der Enveloppenbildung die Röhrenflächen vom konstanten Radius k.

Die Gleichung 2) gestattet eine von Interesse erscheinende Umkehrung. Die Enveloppe der von den Punkten ξ, η, ζ der willkürlichen Fläche Q mit dem Radius $R^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 1$ beschriebenen Kugeln erzeugt die beiden durch das Prinzip der reziproken Radien verbundenen Punkte P, P_1 von 2 Flächen P, P_1.

Es ist nämlich für die Koordinaten x, y, z eines Punktes der Enveloppe des Systems 2) oder

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 1$$

immer

$$7) \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2(\xi x + \eta y + \zeta z) + 1 = 0.$$

Setzt man jetzt ξ, η, ζ als abhängig von den Parametern u, v voraus, so hat man

$$7\,a) \qquad \begin{aligned} \xi_u x + \eta_u y + \zeta_u z &= 0 \\ \xi_v x + \eta_v y + \zeta_v z &= 0. \end{aligned}$$

Demnach ist $\lambda x = \Xi$, $\lambda y = H$, $\lambda z = Z$, wo Ξ, H, Z die Richtungscosinus der Normale der Fläche Q sind, also

$$\lambda^2 = \frac{1}{r^2}.$$

Setzt man dies endlich in 7) ein, so erhält man die Gleichung

$$8) \qquad \lambda^2 - 2\lambda(\xi \Xi + \eta H + \zeta Z) + 1 = 0$$

deren Wurzeln λ_1, λ_2 durch die Gleichung $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ miteinander verbunden sind. Bezeichnet man die zugehörigen Werte der $x\ y\ z$ durch x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 so ist

$$x_1 = \frac{\Xi}{\lambda_1}, \quad x_2 = \frac{\Xi}{\lambda_2} = x_1 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = x_1 \lambda_1^2 = \frac{x_1}{x_1^2} + y_1^2 + z_1^2$$

wie gezeigt werden sollte. Dann und nur dann, wenn $(\xi \Xi + \eta H + \zeta Z)^2 - 1$ ein Quadrat ist, zerfällt die Enveloppe in zwei völlig getrennte Mäntel; dies ist in den bisher be-

trachteten Untersuchungen der Fall. Im allgemeinen aber ist diese Enveloppe eine anallagmatische Fläche.[1])

Es ist übrigens leicht zu zeigen, daß diese Betrachtung wieder auf die Gleichung 1) zurückführt.

Differenziiert man nämlich die Gleichung 7) unter Beachtung von 7a) vollständig nach u und v, so erhält man

$$\begin{aligned}
\xi x_u + \eta y_u + \zeta z_u &= r r_u \\
\xi x_v + \eta y_v + \zeta z_v &= r r_v \\
\xi x + \eta y + \zeta z &= \frac{r^2+1}{2}: \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2.
\end{aligned}$$

Setzt man zur Berechnung der ξ, η, ζ jetzt

$$\xi c_1 + \eta c_2 + \zeta c_3 = C,$$

so daß die ξ, η, ζ die partiellen Differentialquotienten von C nach den c sind, und multipliziert die Determinantengleichung

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u & r r_u \\ x_v & y_v & z_v & r r_v \\ x & y & z & \frac{r^2+1}{2} \\ c_1 & c_2 & c_3 & C \end{vmatrix} = 0$$

mit der Determinante $|X x_u x_v| = \sqrt{cq - f^2}$, so entsteht, wenn man die ersten drei Kolonnen, mit den x, y, z multipliziert, von der letzten abzieht

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u & 0 \\ x_v & y_v & z_v & 0 \\ x & y & z & \frac{1-r^2}{2} \\ c_1 & c_2 & c_3 & C - (c_1 x + c_2 y + c_3 z) \end{vmatrix} = 0,$$

[1]) Diese Bestimmung der anallagmatischen Flächen mit Hilfe von 8) scheint einfacher, als die von Darboux, Sur une classe remarquable de Courbes et de surfaces algébriques, Paris, 2. Aufl., 1896, S. 120—124. Für die Fläche

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1$$

erhält man so unmittelbar

$$(1 + x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4\,(x^2 a^2 + y^2 b^2 + z^2 c^2).$$

welche Gleichung durch nochmalige Multiplikation mit der eben genannten Determinante $\sqrt{cq - f^2}$ sofort übergeht in

$$(C - (c_1 x + c_2 y + c_3 z)) \Sigma (x X) - \frac{1 - r^2}{2} \Sigma c X$$

aus der durch Vergleichung der Koeffizienten

$$(\xi - x) \Sigma (x X) = \frac{1 - r^2}{2} X,$$

also die Gleichungen 1) entstehen.

§ III.

Invariante Beziehungen zwischen den Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung der Flächen P und P_1.

Für die Beziehung zwischen den Fundamentalgrößen erster Ordnung e, f, g; e_1, f_1, g_1 der Flächen P, P_1 erhält man unmittelbar

$$e_1 = e : r^2, \; f_1 = f : r^2, \; g_1 = g : r^2.$$ [1])

Aus den Gleichungen

$$x_u' = \frac{x_u}{r^2} - 2 \frac{x r_u}{r^3}, \quad x_v' = \frac{x_v}{r^2} - 2 \frac{x r_v}{r^3}$$

erhält man

$$x_{uv}' = \frac{x_{uv}}{r^2} - 2 \frac{x_u r_v}{r^3} - 2 \frac{x_v r_u}{r^3} - 2 \frac{x r_{uv}}{r^3} + 6 \frac{x r_u r_v}{r^4}.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit der entsprechenden Ib) des § I und summiert über die Koordinaten x, y, z, so erhält man für die Fundamentalgrößen F und F_1 die Beziehung

$$F_1 = -\frac{F}{r^2} - 2 \frac{S_2}{r^4} (r r_{uv} + r_u r_v - \Sigma x x_{uv}),$$

wobei $$S_2 = x X + y Y + z Z = \Sigma x X$$

gesetzt ist.

[1]) Eine Verwechselung der Fundamentalgrößen f, f_1 mit der Beziehung für die Flächen f, f_1 des § I ist wohl ausgeschlossen.

Aus der Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

folgt aber

$$\Sigma x x_{uv} + f = r r_{uv} + r_u r_v,$$

so daß

$$F_1 = -\left(\frac{F}{r^2} + 2\frac{S_2 f}{r^4}\right) \text{ wird.}$$

Die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung von P_1 sind also durch die in sich reziproken Formeln (wie leicht zu sehen, wird $\frac{S_2'}{r_1} = \frac{S_2}{r}$) gegeben:

$$\text{I)} \qquad \begin{aligned} E_1 &= -\left(\frac{E}{r^2} + 2\frac{S_2}{r^4} e\right) \\ F_1 &= -\left(\frac{F}{r^2} + 2\frac{S_2}{r^4} f\right) \\ G_1 &= -\left(\frac{G}{r^2} + 2\frac{S_2}{r^4} g\right), \end{aligned}$$

aus denen sich manche weitere Folgerungen herleiten lassen. Zunächst erhält man die wichtige Gleichung

$$\text{II)} \qquad \begin{aligned} E_1 du^2 + 2F_1 du\,dv + G_1 dv^2 = -\Bigg\{ &\frac{E du + 2F du\,dv + G dv^2}{r^2} \\ &+ 2S_2 \frac{(e du^2 + 2f du\,dv + g dv^2)}{r^4} \Bigg\} \end{aligned}$$

oder, wenn man durch

$$e_1 du^2 + 2f_1 du\,dv + g_1 dv^2 = \frac{e du^2 + 2f du\,dv + g dv^2}{r^4}$$

dividiert, und mit Bianchi, a. a. O. S. 101, den Krümmungshalbmesser R des den du, dv entsprechenden Normalschnittes von f durch die Gleichung

$$\frac{1}{R} = -\frac{E du^2 + 2F du\,dv + G dv^2}{e du^2 + 2f du\,dv + g dv^2}$$

definiert,

$$\text{III)} \qquad -\frac{1}{R^1} = \frac{r^2}{R} - 2S_2,$$

die man auch in der Form

$$\frac{r_1}{R_1} + \frac{r}{R} = 2\frac{S_2}{r} = 2\frac{S_2'}{r_1}$$

schreiben kann.

Für die bereits erwähnten Mongeschen Flächen, bei denen $\frac{S_2}{r} = \frac{1}{r}\Sigma x X$ eine Konstante k ist, ist daher insbesondere

$$\frac{r^1}{R_1} + \frac{r}{R} = 2k.$$

Allgemein besteht aber für irgend zwei Krümmungshalbmesser R_1 und R_2 von Normalschnitten, denen durch die Transformation R_1' und R_2' entsprechen, nach III) die invariante Beziehung:

$$r_1\left(\frac{1}{R_1'} - \frac{1}{R_2'}\right) + r\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = 0,$$

und den Haupttangentenrichtungen auf P entsprechen immer nach III) gleiche Krümmungen der entsprechenden Normalschnitte auf P_1 (und umgekehrt).

Wendet man Formel III) auf die Hauptkrümmungshalbmesser ϱ_1, ϱ_2; ϱ_1', ϱ_2' für P und P_1 an, so folgt

$$\frac{1}{\varrho_1'} = -\frac{r^2}{\varrho_1} + 2S_2, \quad \frac{1}{\varrho_2'} = -\frac{r^2}{\varrho_2} + 2S_2$$

oder

$$\frac{1}{\varrho_1'\varrho_2'} = \frac{r^4}{\varrho_1\varrho_2} - 2S_2 r^2\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) + 4S_2^2,$$

also wenn man das Krümmungsmaß für P und P_1 mit K und K_1 bezeichnet,

IV) $$K_1 = Kr^4 - 2S_2 r^2 H + 4S_2^2$$

für H als mittlere Krümmung $\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}$.

Für eine Minimalfläche (allgemeiner für jeden Punkt P, dessen mittlere Krümmung gleich Null ist) ist also immer

$$K_1 \geq Kr^4.^{1})$$

[1]) Das Gleichheitszeichen gilt nur für die besonderen Stellen, wo $S_2 = 0$ ist.

Aus der Gleichung III) erhält man ferner

V) $$-H_1 = +Hr^2 - 4S_2$$

oder $$H_1 r_1 + Hr = 4\frac{S_2}{r},$$

was wieder eine besondere Eigenschaft der Mongeschen Flächen ist.

Multipliziert man die Gleichung IV) mit $\sqrt{e_1 g_1 - f_1^2}\, du\, dv = \frac{\sqrt{eg - f^2}}{r^4} du\, dv$, so erhält man, falls die Gaußsche Kurvatura integra durch k, k_1 bezeichnet wird

VI) $$k_1 = k - 2\int \frac{S_2 H}{r^2}\, dw + 4\int \frac{S_2^2}{r^4}\, dw,$$

wobei dw das Flächenelement bezeichnet. Für die Minimalflächen ist daher insbesondere (abgesehen vom trivialen Falle $S_2 = 0$)

$$k_1 > k.$$

Endlich ist auch, wenn man die Gleichung V) mit den korrespondierenden Flächenelementen $dw_1 = \frac{dw}{r^4}$ multipliziert

VII) $$\int \frac{H_1}{r_1}\, dw_1 + \int \frac{H}{r}\, dw = 4\int \frac{S_2\, dw}{r^3}.$$

In dieser Gleichung, die für eine Minimalfläche P wieder besonders einfach wird, hat das Integral rechter Hand eine aus der Potentialtheorie wohl bekannte Bedeutung. Denn es ist

$$\frac{S_2}{r^3} = \frac{1}{r^2}\cos(N, r),$$

so daß es sich um die Kegelöffnung des Flächenstückes auf P für den Punkt O handelt.

Für eine developpable Fläche P folgt aus IV)

$$K_1 = -2S_2 Hr^2 + 4S_2^2,$$

insbesondere also für die der Kugel vom Radius c umschriebenen Developpabelen $S_2 = \text{konst.} = k$

$$K_1 = -2cHr^2 + 4c^2.$$

Hiernach kann K_1 sowohl positiv als negativ für die verschiedenen Punkte ausfallen. In der Tat liefert ja auch schon ein Kreiszylinder eine Kanalfläche, die sowohl Stellen von positiver Krümmung als auch von negativer enthält. Zur Untersuchung des Zeichens von K_1 kann man sich der folgenden Betrachtung bedienen.

Die beiden für jede Wahl der u, v absoluten Invarianten

$$K = \frac{EG - F^2}{eg - f^2} = \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2}, \quad H = \frac{2fF - gE - eG}{eg - f^2} = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}$$

zeigen, daß

$$H^2 - 4K \geq 0 \text{ ist.}$$

Für einen Flächenpunkt negativer Krümmung ist dies selbstverständlich. Setzt man aber $K = -\varkappa$, so ist nach IV)

$$K_1 = -\left(\sqrt{\varkappa}\, r^2 + \frac{HS_2}{\sqrt{\varkappa}}\right)^2 + \left(\frac{H^2}{\varkappa} + 1\right) S_2^2.$$

Ist dagegen K an einer Stelle positiv, so ist $|H| = 2\sqrt{\varkappa} + \delta$, wo δ positiv ist, und dann folgt

$$K_1 = r^2 \sqrt{K} \mp 2 S_2|^2 \mp 2 S_2^2 \delta r^2$$

und von dem Werte der rechten Seiten in diesen beiden Formeln wird das Vorzeichen von K_1 abhängen, womit zugleich auch die Lage der parabolischen Kurve der transformierten Fläche gegeben ist.

Es sei endlich noch eine Bemerkung über die geodätischen Torsionsradien T, T_1 entsprechender Kurven hinzugefügt. In der Gleichung

$$\frac{1}{T} = \frac{(fE - eF)\,du^2 + (gE - eG)\,du\,dv + (gF - fG)\,dv^2}{(e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2)\sqrt{eg - f^2}}$$

setze man nach I)

$$fE - eF = -r^6 (f_1 E_1 - e_1 F_1),$$
$$gE - eG = -r^6 (g_1 E_1 - e_1 G_1),$$
$$gF - fG = -r^6 (g_1 F_1 - f_1 G_1),$$

woraus sofort die invariante Beziehung

$$\frac{r_1}{T_1} + \frac{r}{T} = 0$$

entsteht.

Für die geodätischen Linien resp. Haupttangentenkurven auf den Flächen P ergeben sich keine einfachen Beziehungen bei der Transformation. Dies beruht darauf, daß die Schmiegungsebene einer Kurve auf P bei der Transformation nicht so übersichtlich umgeformt wird. Die Transformation des Ausdruckes

$$\begin{vmatrix} \xi - \lambda \\ x_u \\ x_{uu} \end{vmatrix},$$

bei dem $x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = e$ gesetzt ist, liefert nämlich den Ausdruck

$$r^6 \begin{vmatrix} \xi - x_1 \\ x_{1u} \\ x_{1uu} \end{vmatrix} = -r^2 \begin{vmatrix} \xi - x \\ x_u \\ x_{uu} \end{vmatrix} - 2e \begin{vmatrix} \xi - x \\ x_u \\ x \end{vmatrix}$$

$$+ 2\left(\xi x + \eta y + \zeta z - \frac{1 + r^2}{2}\right) \begin{vmatrix} x \\ x_u \\ x_{uu} \end{vmatrix}.$$

Hiernach besteht die Gleichung der Schmiegungsebene der transformierten Kurve C_1 von C aus drei Gliedern. Von diesen bezieht sich das erste auf die Schmiegungsebene von C, das dritte auf eine Ebene E, die senkrecht zum Radiusvektor OP durch den Mittelpunkt von PP_1 geht. Das mittlere Glied gehört zu einer Ebene, die den Radiusvektor OP und die Tangente von C enthält. Eine Vereinfachung findet nur statt für die Minimalkurven $e = 0$ statt; hier ist die Schmiegungsebene von C_1 immer die durch den Punkt P_1 gehende Ebene des Büschels, das aus E und der Schmiegungsebene in P besteht. Der Faktor $|x\, x_u\, x_{uu}|$ verschwindet nur dann, wenn der Radiusvektor in der Schmiegungsebene von P liegt. Soll das überall stattfinden, so hat man nur den trivialen Fall, daß die Kurve C eben ist und ihre Ebene durch den Pol O geht.

Das ergibt sich auch aus den Formeln von Frenet. Denn man hat jetzt, wenn etwa u die Bogenlänge von C bedeutet,

$$\Sigma x \lambda = 0.$$

woraus durch Differentiation $\frac{1}{\tau} \Sigma(x\xi) = 0$ entsteht. Ist die Kurve C eine Raumkurve, so folgt

$$\Sigma(x\xi) = 0$$

und eine weitere Differentiation liefert dann

$$\Sigma(a\xi) - \Sigma x \left(\frac{a}{\varrho} + \frac{\lambda}{\tau}\right) = 0 \text{ oder } \Sigma(ax) = 0.$$

Daraus folgt aber $x = y = z = 0$, d. h. Raumkurven dieser Art gibt es überhaupt nicht. Einer geradlinigen Minimalkurve entspricht aber immer wieder eine geradlinige Minimalkurve.

Es besteht übrigens die allgemeine Gleichung

$$r^6 \begin{vmatrix} x_1 \\ x_{1u} \\ x_{1uu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x \\ x_u \\ x_{uu} \end{vmatrix}.$$

Führt man hier noch die Richtungen b, b_1 der Binormalen ein, so hat man

$$\frac{r}{\varrho} \cos(OP, b) = \frac{r_1}{\varrho_1} \cos(OP_1, b_1)$$

als invariante Beziehung zwischen den Krümmungshalbmessern und der Richtung der Binormalen.

§ IV.

Über die zu der Transformation R gehörigen Strahlensysteme.

Die Tangentenebenen der Flächen f und f_1 in den Punkten P, P_1 haben nach § I, I) die Gleichungen

$$\Sigma(\xi - x)\frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

$$\Sigma\left(\xi - \frac{x}{r^2}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x}r^2 - 2Sx\right) = 0$$

oder

$$\Sigma\xi\frac{\partial f}{\partial x} = S,$$

1)

$$\Sigma\xi x = \frac{1+r^2}{2}.$$

Die Schnittlinien derselben bilden ein Strahlensystem Σ, dessen Brennfläche in einfacher Beziehung zu den Flächen P, P_1 steht. Aus 1) folgt durch Differentiation, unter Voraussetzung, daß ξ, η, ζ ungeändert bleiben, für die Koordinaten ξ, η, ζ eines Punktes der Brennfläche

2)

$$\Sigma\xi\, d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = dS,$$

$$\Sigma\xi\, dx = r\, dr.$$

Durch Elimination der ξ, η, ζ folgt hieraus die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & - & - & S \\ d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) & - & - & dS \\ dx & - & - & r\,dr \\ x & - & - & \frac{1+r^2}{2} \end{vmatrix} = 0,$$

also durch Subtraktion der drei ersten mit x, y, z multiplizierten Kolonnen, wie in § I

$$\frac{1-r^2}{2}D = 0.$$

Das heißt: Die Brennfläche von Σ ist stets reell und die Developpabelen des Systems Σ entsprechen den sich schneidenden Normalen längs der Krümmungslinien von f oder f_1.

Ist insbesondere $r^2 = 1$, so ist nach 1)

$$\Sigma(\xi - x)\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \Sigma(\xi - x)x = 0$$

d. h. jeder Strahl, der zu einem benachbarten Punkte von P gehört, geht durch diesen Punkt P. Ein solcher Strahl ist singulär.

Der zu P, P_1 gehörende Strahl trifft die Ebene PQP_1 in einem Punkte C seiner Ausgangsfläche, dessen Koordinaten sind nach § II, 3

$$3) \qquad \begin{aligned} \xi_1 &= px + qX, \\ \eta_1 &= py + qY, \\ \zeta_1 &= pz + qZ, \end{aligned}$$

woraus

$$4) \qquad \begin{aligned} pS_2 + q &= S_2, \\ pr^2 + qS_2 &= \frac{1 + r^2}{2} \end{aligned}$$

oder

$$p - 1 = \frac{r^2 - 1}{2} : S_2^2 - r^2,$$

$$q = \frac{1 - r^2}{2} S_2 : S_2^2 - r^2$$

folgt. Der Punkt C ist wieder gleichweit von P und P_1 entfernt, liegt daher auf der Halbierungslinie des Winkels PQP_1.

Wir untersuchen nun zunächst die Lage der Brennpunkte selbst. Mit Hilfe der Koordinaten von C kann man sie durch die Gleichungen

$$5) \qquad \begin{aligned} \xi &= \xi_1 + \mu(yZ - zY), \\ \eta &= \eta_1 + \mu(zX - xZ), \\ \zeta &= \zeta_1 + \mu(xY - yX), \end{aligned}$$

wobei $\mu\sqrt{r^2 - S_2^2} = \sigma$ ($r^2 - S_2^2$ ist als Summe von Quadraten immer positiv) die Entfernung des Brennpunktes vom Punkte C bezeichnet, darstellen. Setzt man in den Gleichungen 1) für die ξ, η, ζ, welche auch die Form

$$\begin{aligned} \Sigma \xi X &= S_2, \\ \Sigma \xi x &= \frac{1 + r^2}{2}, \\ \Sigma \xi\, dX &= dS_2, \\ \Sigma \xi\, dx &= r\, dr \end{aligned}$$

annehmen, die Werte 5) ein, so ergibt sich, da die beiden ersten schon von selbst erfüllt sind,

$$\Sigma \xi_1\, dX + \mu \begin{vmatrix} dX \\ x \\ X \end{vmatrix} = dS_2,$$

$$\Sigma \xi_1\, dx + \mu \begin{vmatrix} dx \\ x \\ X \end{vmatrix} = r\, dr.$$

Da nach 3)

$$\begin{aligned} \Sigma \xi_1\, dX &= p\, d\Sigma(x X) = p\, dS_2, \\ \Sigma \xi_1\, dx &= p\, r\, dr \end{aligned}$$

ist, so erhält man

$$\mu \begin{vmatrix} dX \\ x \\ X \end{vmatrix} = dS_2 (1 - p), \quad \mu \begin{vmatrix} dx \\ x \\ X \end{vmatrix} = r\, dr (1 - p).$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit der Determinante

$$|X\, x_u\, x_v| = \sqrt{eg - f^2},$$

so hat man

$$6) \quad \mu \begin{vmatrix} \Sigma(x_u\, dX), & \Sigma(x_v\, dX) \\ r\, r_u & r\, r_v \end{vmatrix} = dS_2 (1 - p)\sqrt{eg - f^2},$$

$$\mu \begin{vmatrix} \Sigma(x_u\, dx), & \Sigma(x_v\, dx) \\ r\, r_u & r\, r_v \end{vmatrix} = r\, dr (1 - p)\sqrt{eg - f^2}.$$

In diesen Gleichungen ist noch dS_2 durch seinen Wert zu ersetzen. Man findet ihn durch die folgende Betrachtung. Aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}
\Sigma x\, dX &= dS_2,\\
\Sigma x_u\, dX &= -(E\,du + F\,dv),\\
\Sigma x_v\, dX &= -(F\,du + G\,dv),\\
\Sigma X\, dX &= 0
\end{aligned}$$

ergibt sich durch Multiplikation mit der eben genannten Determinante mit dem aus den vorstehenden Gleichungen folgenden Eliminationsresultat

$$\begin{vmatrix} x & - & - & dS_2 \\ x_u & - & - & -(E\,du + F\,dv) \\ x_v & - & - & -(F\,du + G\,dv) \\ X & - & - & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

die noch mehrfach zu benutzende Gleichung

$$7) \qquad (eg - f^2)\,dS^2 = -\{(E\,du + F\,dv)(r_u g - r_u f) - (F\,du + G\,dv)(r_u f - r_v e)\}\,r,$$

Setzt man diesen Wert von dS_2 in die Gleichungen 6) ein, so hat man zwei Gleichungen zwischen den Differentialen. Eliminiert man μ, so entsteht eine quadratische Gleichung in du, dv, welche nur die der Krümmungslinien von P sein kann, so daß es unnötig erscheint, dies zu verifizieren, was durch wirkliche Ausrechnung geschehen kann. Eliminiert man dagegen die du, dv, so entsteht eine quadratische Gleichung für μ, welche die beiden Brennpunkte auf dem Strahle bestimmt. Zur Vereinfachung der Formeln wird man voraussetzen, daß die Parameter u, v schon den Krümmungslinien von P entsprechen, also $f = 0$, $F = 0$ ist. Man hat dann nach 7)

$$dS_2 = r\left(r_u \frac{du}{\varrho_1} + r_v \frac{dv}{\varrho_2}\right)^{1}),$$

---

[1]) Aus den auf die Krümmungslinien von P bezogenen Gleichungen

$$\frac{\partial S_2}{\partial u} = \frac{r r_u}{\varrho_1}, \quad \frac{\partial S_2}{\partial v} = \frac{r r_v}{\varrho_2}$$

falls wieder mit ϱ_1 und ϱ_2 die beiden Hauptkrümmungsradien in P bezeichnet werden. Die Gleichungen 6) werden nun für

$$\frac{\mu}{1-p} = \nu$$

$$-\nu E r_v\, du - G r_u\, dv) = \sqrt{eg}\left(r_u \frac{du}{\varrho_1} + r_v \frac{dv}{\varrho_2}\right)$$

$$\nu\,(e r_v\, du - g r_u\, dv) = \sqrt{eg}\,(r_u\, du + r_v\, dv).$$

Eliminiert man jetzt die ν, so bleibt

$$\left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1}\right)(r_\nu^2 e - r_u^2 g)\, du\, dv = 0,$$

womit zugleich gezeigt ist, daß, wie schon bemerkt wurde, die Krümmungslinien $du = 0$, $dv = 0$ entstehen. Eliminiert man dagegen die du, dv, so folgt

$$\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}\right)\left[\nu^2 r_u r_v - \nu\left(\frac{r_u^2 g - e r_v^2}{\sqrt{eg}}\right) - r_u r_v\right] = 0.$$

---

läßt sich noch eine Beziehung von allgemeinerem Interesse herleiten. Man hat sofort

$$\frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial(r r_u)}{\partial v} - \frac{1}{\varrho_2}\frac{\partial(r r_\nu)}{\partial u} + r r_u \frac{\partial \frac{1}{\varrho_1}}{\partial v} - r r_\nu \frac{\partial \frac{1}{\varrho_1}}{\partial u} = 0.$$

Aus der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ folgt aber

$$\frac{\partial(r r_u)}{\partial v} = \frac{\partial(r r_\nu)}{\partial u} = \Sigma x \cdot x_{u\nu}.$$

Nun ist nach den Gleichungen der Flächentheorie

$$\Sigma x x_{u\nu} = B r r_u + B_1 r r_\nu, \text{ wo } 2eB = e_\nu,\ 2gB_1 = g_u,$$

so daß nach Beseitigung des Faktors r ($r \neq 0$)

$$r_u\left\{\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}\right)\frac{e_v}{e} + 2\frac{\partial \frac{1}{\varrho_1}}{\partial v}\right\} = r_\nu\left\{\left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1}\right)\frac{g_u}{g} + 2\frac{\partial \frac{1}{\varrho_2}}{\partial u}\right\}$$

wird. In dieser für jede Fläche gültigen Gleichung wird das Verhältnis $r_u : r_\nu$ nur von den Fundamentalgrößen abhängig; r ist dabei ganz herausgefallen. Das gleiche findet übrigens, wovon man sich durch direkte Ausrechnung überzeugen kann, für jedes System von Parametern statt.

Diese Gleichung hat die Wurzeln

$$\nu_1 = \sqrt{\frac{g}{e}}\,\frac{r_u}{r_v}; \quad \nu_2 = -\sqrt{\frac{e}{g}}\,\frac{r_v}{r_u},$$

so daß $\nu_1 \nu_2 = -1$ ist. Die Stellen, wo die Brennpunkte symmetrisch zu C liegen, sind durch die Gleichung

$$r_u^2 g - r_v^2 e = 0$$

gegeben. Bei dieser Betrachtung ist $\varrho_1 \neq \varrho_2$ vorausgesetzt. Für einen Nabelpunkt der Fläche P ist die Lage der Brennpunkte unbestimmt; den Nabelpunkten entsprechen singuläre Strahlen, die von allen benachbarten getroffen werden.

Man kann das an dem Beispiel der Kugel

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - R^2 = 0$$

oder

$$r^2 - 2T - A - R^2 = 0$$

für

$$T = ax + by + cz, \; A = a^2 + b^2 + c^2$$

unmittelbar sehen. Denn das Strahlensystem ist hier durch die Gleichungen

$$\Sigma \xi (x-a) = r^2 - T, \; \Sigma \xi x = \frac{1+r^2}{2}$$

definiert, aus denen

$$-\Sigma \xi a = \frac{R^2 - A - 1}{2}$$

folgt. Alle Strahlen sind jetzt singulär, weil sie in einer Ebene liegen. Diese steht senkrecht zu der Verbindungslinie von O mit dem Mittelpunkt der Kugel; sie geht insbesondere durch O, wenn die Kugel die Einheitskugel orthogonal schneidet.

Ein zweites Strahlensystem entsteht, wenn man durch die Punkte Q als Ausgangsfläche die Parallelen zu den Radienvektoren $O\,P$ zieht. Da die Koordinaten ξ, η, ζ des Punktes Q sich in der Form

$$\xi = x + \lambda X$$
$$\eta = y + \lambda Y$$
$$\zeta = z + \lambda Z$$

für $\lambda = 1 - r^2 : 2S_2$ schreiben lassen, hat man

$$d\xi = dx + \lambda dX - \frac{r\,dr}{S_2} X - \frac{\lambda}{S_2} dS_2$$

also unter Beachtung der schon oft benutzten Gleichung

$$dS_2 = \Sigma x\,dX$$
$$\Sigma(d\xi\, x) = 0.$$

Die Tangentenebene der Fläche Q steht demnach senkrecht zum Radiusvektor; sie geht zugleich, wie man leicht sieht, durch den Mittelpunkt der Strecke $P\,P_1$. Das Strahlensystem Q hat also die Fläche der Zentra der Fläche Q zur stets reellen Brennfläche.

Man erhält die negativen Fundamentalgrößen zweiter Ordnung der Ausgangsfläche Q, wenn man die partiellen Differentialquotienten der ξ, η, ζ nach u und v mit den Differentialen der Richtungscosinus $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$ multipliziert, d. h. wenn man die Summen der Produkte

$$\xi_u = x_u + \lambda X_u - \frac{rX}{S_2}\left(r_u + \lambda \frac{\partial S_2}{\partial u}\right)$$
$$\xi_v = x_v + \lambda X_v - \frac{rX}{S_2}\left(r_v + \lambda \frac{\partial S_2}{\partial v}\right)$$

mit den Werten

$$\frac{x_u}{r} - \frac{x r_u}{r^2},\quad \frac{x_v}{r} - \frac{x r_v}{r^2}$$

bildet. So ergibt sich unter Beachtung der Gleichung $dS_2 = \Sigma x\,dX$ aus der Gleichung

$$-\bar{F} = \frac{f}{r} - \lambda \frac{F}{r} - r\frac{r_u r_v}{r^2} - \frac{\lambda}{r^2}\Sigma(x X_u) + \frac{r}{r^2}\left(r_u r_v + \lambda \frac{\partial S_2}{\partial u}\right)$$

$$
\begin{aligned}
-\bar{E} &= \frac{e}{r} - \frac{\lambda E}{r} \\
-F &= \frac{f}{r} - \frac{\lambda F}{r} \qquad 10) \\
-\bar{G} &= \frac{g}{r} - \frac{\lambda G}{r}.
\end{aligned}
$$

Die Gleichung der Haupttangenten von Q ist daher $0 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2 - \lambda(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2)$; sie entsprechen also den Richtungen, für die der Krümmungshalbmesser R des Normalschnittes bei P gleich $-\lambda$ ist. Setzt man wieder u, v als Parameter der Krümmungslinien voraus, so hat man aus 10)

$$
\begin{aligned}
-\bar{E} &= \frac{e}{r}\left(1 + \frac{\lambda}{\varrho_1}\right) \\
-\bar{G} &= \frac{g}{r}\left(1 + \frac{\lambda}{\varrho_2}\right) \qquad 11) \\
\bar{F} &= 0.
\end{aligned}
$$

Den Krümmungslinien von P entspricht also ein konjugiertes System auf Q. Aus 11) folgt

$$\bar{E}\,\bar{G} = \frac{eg}{r^2}(1 + H\lambda + K\lambda^2)$$

oder

$$E\,\bar{G} = \frac{eg}{r^2}\left((1 + \frac{H}{2}\lambda)^2 - \frac{\lambda^2}{4}(H^2 - 4K)\right),$$

woraus hervorgeht, daß die Haupttangenten von Q nicht notwendig reell sind, da der Faktor von λ^2 negativ ist.

Zur Bestimmung des Krümmungsmaßes selbst muß man das Quadrat des Längenelementes bei Q entwickeln. Man erhält sofort

$$
\begin{aligned}
\bar{e} &= e - 2\lambda E + \lambda^2 \Sigma(X_u^2) + \frac{1}{S_2^2}\left(r r_u + \lambda \frac{\partial S_2}{\partial u}\right)^2 \\
12)\quad f &= f - 2\lambda F + \lambda^2 \Sigma(X_u X_v) + \frac{1}{S_2^2}\left(r r_u + \lambda \frac{\partial S_2}{\partial u}\right)\left(r r_v + \lambda \frac{\partial S_2}{\partial v}\right) \\
\bar{g} &= g - 2\lambda G + \lambda^2 \Sigma(X_v) + \frac{1}{S_2^2}\left(r r_v + \lambda \frac{\partial S_2}{\partial v}\right)^2
\end{aligned}
$$

oder wenn für die Krümmungsparameter u, v nach 8)

$$\frac{\partial S_2}{\partial u} = \frac{r_u r}{\varrho_1} \quad \frac{\partial S_2}{\partial v} = \frac{r_v r}{\varrho_2}$$

gesetzt wird, für die drei letzten Glieder in den Formeln 12) die Werte

$$\frac{1}{S_2^2} r_u^2 r^2 \left(1+\frac{\lambda}{\varrho_1}\right)^2, \frac{1}{S_2^2} r_u r_v r^2 \left(1+\frac{\lambda}{\varrho_1}\right)\left(1+\frac{\lambda}{\varrho_2}\right), \frac{1}{S_2^2} r_v^2 r^2 \left(1+\frac{\lambda}{\varrho_2}\right).$$

Es ist ferner

$$\Sigma(X_u^2) = -(eK+HE) = -\left(e\frac{EG}{eg} - \left(\frac{eG+gE}{eg}\right)E\right) = +\frac{E^2}{e}$$

$$\Sigma(X_u X_v) = 0$$

$$\Sigma(X_v)^2 = \frac{G^2}{g},$$

also

$$\bar{e} = \left(1+\frac{\lambda}{\varrho_1}\right)^2\left(e+\frac{r^2 r_u^2}{S_2^2}\right)$$

$$f = \left(1+\frac{\lambda}{\varrho_1}\right)\left(1+\frac{\lambda}{\varrho_2}\right)\left(r^2\frac{r_u r_v}{S_2^2}\right)$$

$$g = \left(1+\frac{\lambda}{\varrho_2}\right)^2\left(g+\frac{r^2 r_v^2}{S_2^2}\right),$$

so daß

$$\bar{e}\bar{g} - \bar{f}^2 = \lambda_1^2\lambda_2^2\left(eg + r^2\left(\frac{r_v^2 e + r_u^2 g}{S_2^2}\right)\right)$$

wird, wenn man

$$\lambda_1 = 1+\frac{\lambda}{\varrho_1}, \quad \lambda_2 = 1+\frac{\lambda}{\varrho_2}$$

setzt. Dieser Ausdruck läßt sich noch vereinfachen, denn es ist

$$S_2 = \Sigma(xX) = \frac{1}{\sqrt{eg}}\,|x\,x_u\,x_v|,$$

also

$$S_2^2 = \frac{1}{eg}(r^2 eg - r^2 r_u^2 g - r^2 r_v^2 e)$$

oder

$$eg\,(S_2^2 + r^2(r_u^2 g + r_v^2 e) = r^2 eg.$$

Es ist daher

$$\bar{e}\bar{g} - f^2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 r^2 \frac{eg}{S_2^2}.$$

Hiernach ergiebt sich für das Krümmungsmaß im Punkte Q

$$K = \frac{S_2^2}{r^4 \lambda_1 \lambda_2}.$$

Da auch

$$\bar{e}\bar{G} + g\bar{E} = -\frac{\lambda_1 \lambda_2}{r}\left(\lambda_1 g\left(e + \frac{r^2 r_u^2}{S_2^2}\right) + \lambda_2 e\left(g + \frac{r^2 r_v^2}{S_2^2}\right)\right),$$

so hat man zur Bestimmung der Hauptkrümmungsradien ϱ im Punkte Q die Gleichung

$$\left(\frac{\bar{\varrho}}{r}\right)^2 eg\lambda_1\lambda_2 - \frac{\bar{\varrho}_1}{r}\lambda_1\lambda_2\left(\lambda_1 g\left(e + \frac{r^2 r_u^2}{S_2^2}\right) + \lambda_2 e\left(g + \frac{r^2 r_v^2}{S_2^2}\right)\right)$$
$$+ \lambda_1^2 \lambda_2^2 \frac{r^2 eq}{S_2^2} = 0. \qquad 14)$$

Läßt man den Faktor $\lambda_1 \lambda_2$ fort, so wird für einen Nabelpunkt in P $\varrho_1 = \varrho_2$, also auch $\lambda_1 = \lambda_2$ und die Gleichung 14) oder

$$\left(\frac{\bar{\varrho}}{r}\right)^2 - \frac{\bar{\varrho}_1}{r}\lambda_1\left(\frac{r^2}{S_2^2}\right) + \lambda_1^2 \frac{r^2}{S_2^2} = 0$$

zerfällt in die Faktoren

$$\left(\frac{\bar{\varrho}}{r} - \lambda_1 \frac{r^2}{S_2^2}\right)\left(\frac{\bar{\varrho}}{r} - \lambda_1\right) = 0.$$

Einem Nabelpunkte in P wird daher nicht notwendig wieder ein Nabelpunkt bei Q entsprechen.

Die Gleichung der Fläche Q ist im allgemeinen nicht einfach. Ist P die Kugel $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - R^2 = 0$, so hat man für $\xi - a = \xi_1$, $\eta - b = \eta_1$, $\zeta - c = \zeta_1$

$$\xi_1 = \frac{(x-a)N}{r^2 + R^2 - A}, \quad \eta_1 = \frac{(y-b)N}{r^2 + R^2 - A}, \quad \zeta_1 = \frac{(z-c)N}{r^2 + R^2 - A},$$

falls $N = 1 + R^2 - A$ gesetzt wird. Für $N = 0$, wo die Kugel die Einheitskugel orthogonal schneidet, reduziert sich

die Fläche auf den Mittelpunkt der ersteren. Im allgemeinen Falle ist aber

$$\Sigma(\xi_1 a) = \frac{(r^2 - A - R^2)N}{2(r^2 + R^2 - A)}.$$

Setzt man nun $N = 2n$, so ist

$$\Sigma(\xi_1 a) = n\left(1 - \frac{2R^2}{r^2 + R^2 - A}\right), \quad \Sigma\xi_1^2 = \frac{4R^2 n^2}{(r^2 + R^2 - A^2)},$$

also $$(\Sigma(\xi_1 a) - n)^2 = \frac{4R^4 n^2}{(r^2 + R^2 - A)^2} = R^2 \Sigma\xi_2^1.$$

Das ist die Gleichung einer Fläche zweiten Grades, bei der die Koeffizienten der quadratischen Glieder

$R^2 - a^2$, $R^2 - b^2$, $R^2 - c^2$, $-2ab$, $-2ac$, $-2bc$ sind.

Die Wurzeln der charakteristischen Determinantengleichung dritten Grades in λ sind gegeben durch

$$(R^2 - \lambda)^2 (R^2 - \lambda - A) = 0.$$

Es entsteht also eine Rotationsfläche zweiten Grades, deren Axenrichtung die Richtungscosinus

$$\frac{a}{\sqrt{A}}, \quad \frac{b}{\sqrt{A}}, \quad \frac{c}{\sqrt{A}}$$

hat, also der Verbindungslinie des Pols mit dem Mittelpunkt der Kugel parallel läuft. Die Koordinaten des Mittelpunktes der Fläche sind (abgesehen von dem Falle, wo er ins Unendliche fällt)

$$\xi_1^1 = -\frac{na}{R^2 - A}, \quad n_1^1 = -\frac{nb}{R^2 - A}, \quad \zeta_1^1 = -\frac{nc}{R^2 - A}$$

und die Gleichung der Fläche Q in Bezug auf ihre Hauptaxen und den Mittelpunkt

$$(\Xi_1^2 + H_1^2) R^2 + Z_1^2 (R^2 - A) = \frac{n^2 R^2}{R^2 - A},$$

deren Zentrafläche dann die Brennfläche des Strahlensystems Q ist.

Berichtigung.

Auf S. 242, § III muß es heißen $e_1 = e : r^4$ etc.

Die Beanspruchung eines Stabes von elliptischem Querschnitt auf Drillen bei behinderter Querschnittswölbung.

Von **A. Föppl.**

Vorgelegt in der Sitzung am 8. Mai 1920.

Bei der Beanspruchung auf Drillen erfährt ein Stab, wenn kein Hindernis im Wege steht, eine elastische Formänderung, bei der jeder Querschnitt in eine krumme Fläche übergeht, deren Gestalt von der Querschnittsgestalt abhängig ist. Nur wenn der Querschnitt kreisförmig ist, bleibt er bei der Formänderung eben. Im anderen Falle müssen die in der Richtung der Stabachse gerechneten Ordinaten ξ der krummen Fläche der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = 0$$

genügen, wenn y und z die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes der Querschnittsebene bedeuten und außerdem muß noch die Randbedingung erfüllt werden, die sich aus der Forderung ergibt, daß die im Stabquerschnitte übertragenen Schubspannungen längs der Umrißlinie überall nur tangential gerichtet sein können.

Im besonderen Falle des elliptischen Querschnitts, auf den sich unsere Betrachtung hier beschränken soll, obschon sich die Überlegungen, die wir anzustellen haben, sinngemäß auch auf andere Fälle übertragen lassen, geht die Querschnittsebene

in ein hyperbolisches Paraboloid über, dessen Odinate ξ durch die Formel

$$\xi = \frac{a^2 - b^2}{\pi a^3 b^3 G} M y z \tag{1}$$

dargestellt wird. Darin bedeuten a und b die große und die kleine Halbachse der Querschnittsellipse, G den Gleitmodul und M das verdrehende Moment.

Wesentliche Voraussetzung für die Gültigkeit dieser von de Saint-Venant aufgestellten Theorie der Stabdrillung ist jedoch, daß sich der Ausbildung der Querschnittswölbung kein Hindernis in den Weg stellt. Diese Voraussetzung ist aber bei zahlreichen praktischen Anwendungen, die man von der Verdrehungstheorie zu machen hat, keineswegs streng oder auch nur mit genügender Annäherung erfüllt. Man hat sich daher schon wiederholt bemüht, die Theorie so weit zu verallgemeinern, daß sie auch den Fall eines sich der Querschnittswölbung entgegen stellenden Widerstandes mit zu umfassen vermag, ohne daß es jedoch gelungen wäre, zu befriedigenden und allgemein brauchbaren Ergebnissen dabei zu gelangen.

Für die Anwendungen in der Technik erscheint es besonders erwünscht, eine hinreichend genaue Näherungslösung der Aufgabe für den Fall des doppel-T-förmigen Querschnitts zu erhalten und darauf haben sich auch die bisherigen Bestrebungen ausschließlich gerichtet. Zuerst ist dies von Timoschenko[1]) in verschiedenen größeren Abhandlungen über die Stabilität des elastischen Gleichgewichts mehr nebenbei geschehen. Timoschenko hat dabei die Formänderung der Trägerflanschen als eine Biegung aufgefaßt, auf die er die Differentialgleichung der elastischen Linie eines gebogenen Stabes anwenden zu können glaubte. Daß dies nicht streng zulässig ist, war ihm wohl bekannt; aber ich möchte einstweilen annehmen, daß er den Grad der Annäherung an das wirkliche

[1]) Timoschenko, Einige Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie. Zeitschr. f. Math. und Physik, Bd. 58, S. 337, 1910, sowie ausführlicher in „Sur la stabilité des systèmes elastiques". Annales des ponts et chaussées. Fasc. III, IV, V, 1913.

Verhalten, der sich mit dieser Voraussetzung erreichen läßt, viel zu günstig eingeschätzt hat. Jedenfalls kann diese Frage noch nicht als befriedigend gelöst angesehen werden. Ich habe mit Versuchen begonnen, die elastische Formänderung solcher Träger unmittelbar zu messen und hoffe damit zu einer Klärung der Frage beitragen zu können.

Zu erwähnen ist ferner noch eine Arbeit von Senft[1]), der sich auf eine ähnliche Annahme stützt wie Timoschenko und wiederum die Differentialgleichung der elastischen Linie eines gebogenen Stabes auf die Mittellinie des Trägerflansches anwendet, obschon diese Differentialgleichung auf der Voraussetzung beruht, daß die Stabquerschnitte eben bleiben, während sie hier zweifellos gekrümmt werden.

Ich habe mich von diesen früheren Arbeiten jedenfalls nicht befriedigt gefühlt und mich daher bemüht, eine besser zutreffende Lösung zu finden. Da es sich nur um eine Näherungslösung handeln kann, erschien es angezeigt, zunächst durch unmittelbare Messungen einen Überblick darüber zu erlangen, wie sich ungefähr die Formänderung bei der Verdrehung in solchen Fällen tatsächlich vollzieht. Darauf werden sich dann geeignete Näherungsannahmen stützen lassen, die einer praktisch brauchbaren Theorie zu Grunde gelegt werden können. Da diese Messungen schwierig und sehr mühsam sind, werden sie freilich nicht so bald zum Abschlusse gebracht werden können.

Außer dem experimentellen ist aber auch noch ein anderer Weg möglich, der wenigstens für den einfachsten Fall des elliptischen Stabquerschnitts zu einer Lösung führt, für die es nicht nötig erscheint, sie durch Versuchsergebnisse erst noch besonders zu stützen. Diese Lösung wird zugleich auch ein Muster dafür abgeben können, nach dem man sich für andere Fälle richten kann und aus diesem Grunde will ich sie hier veröffentlichen, ohne zuvor den Abschluß der Versuche mit den Doppel-T-Trägern abzuwarten.

---

[1]) A. Senft, Über die Beanspruchung durch Drehmomente. Zeitschr. f. Bauwesen, Bd. 69, S. 683, 1919.

Eine Hinderung der Querschnittswölbung kann auf verschiedene Arten herbeigeführt werden. Im einfachsten Falle geschieht dies, indem ein Stabende derart befestigt wird, daß es als vollkommen eingespannt gelten kann, in demselben Sinne, in dem man von einer Einspannung bei der Biegung eines Stabes redet, so nämlich, daß kein Punkt des Einspannquerschnitts eine Verschiebung ξ in der Richtung der Stabachse ausführen kann. Dieser Fall liegt z. B. vor bei Guß- oder Schmiedestücken, die aus einem stabförmigen Körper bestehen, der an einem Ende in eine starke Platte ausläuft, die senkrecht zur Stabachse steht und hinreichend steif ist, um jede merkliche Krümmung der Stabquerschnitte in ihrer unmittelbaren Nachbarschaft zu verhindern.

Ein anderer Fall liegt vor, wenn ein Stab durch drei drillende Kräftepaare belastet wird, von denen zwei an den beiden Enden angreifen, im gleichen Sinne drehen und gleich groß sind, während das dritte Kräftepaar in der Stabmitte angebracht ist, im entgegengesetzten Sinne dreht und doppelt so groß ist wie eins der vorigen. In diesem Falle können sich zwar die Endquerschnitte wölben, nicht aber der Mittelquerschnitt, der aus Symmetriegründen notwendig eben bleiben muß. Darauf hat schon Timoschenko hingewiesen. Jede der beiden Stabhälften verhält sich dann genau so wie ein Stab, der am einen Ende eingespannt und am freien Stabende durch ein verdrehendes Kräftepaar belastet wird.

Dann möge noch ein dritter Fall angeführt werden, nämlich ein Stab, der so lang ist, daß man ihn als unendlich lang ansehen kann und an dem in zwei Querschnitten, die nicht zu weit von der Stabmitte entfernt sind, zwei im entgegengesetzten Sinne drehende Kräftepaare von gleicher Größe angreifen. Nach dem Prinzip von de Saint-Venant in seiner allgemeinsten Fassung können die in größeren Abständen von dem Mittelstück liegenden Stabteile keine merkliche Formänderung durch die angegebenen Lasten erfahren. Die Querschnitte bleiben also dort eben und erst bei Annäherung an das Mittelstück gelangt man zu Querschnitten, die sich mehr und mehr krümmen.

Hier wird also die wenigstens teilweise Behinderung der mit einer einfachen und reinen Verdrehungsbeanspruchung verbundenen elastischen Formänderung auch in dem mittleren Stabteile durch den Zusammenhang mit dem sich nach außen hin anschließenden unbelasteten und im übrigen völlig freien Stabteile herbeigeführt.

Der Einfachheit halber wollen wir uns hier auf die Behandlung des zuerst angeführten Falles eines an einem Ende eingespannten Stabes beschränken, da ohnehin leicht ersichtlich ist, daß sich die übrigen Fälle in ganz ähnlicher Weise erledigen lassen. Nach dem Prinzip von de Saint-Venant läßt sich hier wiederum schließen, daß sich der Einfluß der Einspannung nur in den nicht zu weit vom Einspannquerschnitte entfernten Stabteilen bemerklich machen kann. Wir wollen voraussetzen, daß der Stab lang genug ist, um schon in der Stabmitte und darüber hinaus diesen Einfluß vernachlässigen zu können. In diesen Stabteilen kann sich dann die elastische Formänderung nicht mehr merklich von jener unterscheiden, die der gewöhnlichen Theorie der Drillung, also der von de Saint-Venant gegebenen Lösung entspricht.

Die X-Achse des rechtwinkligen Koordinatensystems, auf das sich die vorher schon angeschriebenen Gleichungen bezogen, möge mit der Stabachse zusammenfallen und die YZ-Ebene mit dem Einspannquerschnitte. In Anlehnung an Gl. (1) machen wir dann für die Verschiebungskomponente ξ den Ansatz

$$\xi = \frac{a^2 - b^2}{\pi a^3 b^3 G} M y z (1 - e^{-\gamma x}), \tag{2}$$

worin γ ein „Freiwert“ ist, der seine nähere Bestimmung späterhin noch finden wird. Jedenfalls ist er unabhängig von den Koordinaten $x y z$. Der Ansatz entspricht einerseits dem Prinzip von de St.-V., indem das Zusatzglied für $x = \infty$ zu Null wird und andererseits der Grenzbedingung für den Einspannquerschnitt.

Ferner dürfen wir erwarten, daß ebenso wie in der gewöhnlichen Theorie der Drillung auch hier die Spannungskomponenten

$$\sigma_y = \sigma_z = 0$$

zu setzen sind. Dagegen kann in unserem Falle die in der Richtung der Stabachse gehende Spannungskomponente σ_x nicht mehr gleich Null sein; vielmehr ergibt sich dafür

$$\sigma_x = E\frac{\partial \xi}{\partial x} = \gamma \frac{a^2 - b^2}{\pi a^3 b^3} \cdot \frac{2(m+1)}{m} M y z e^{-\gamma x}. \tag{3}$$

Die Bedeutung der Buchstaben ergibt sich schon aus dem Zusammenhange und stimmt mit der in der Technik und auch in meinen Lehrbüchern gebrauchten Beziehungsweise hier und in der Folge überein. Zuletzt ist von der bekannten Beziehung zwischen den Elastizitätskonstanten

$$G = \frac{mE}{2(m+1)}$$

Gebrauch gemacht worden.

Wir haben jetzt die Schubspannungskomponenten τ so zu wählen, daß sie mit den bereits festgestellten Normalspannungen σ überall Gleichgewicht herstellen. Die Gleichgewichtsbedingungen lauten hier

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Ihnen läßt sich genügen, indem man zunächst

$$\tau_{yz} = k(a^2 b^2 - b^2 y^2 - a^2 z^2)^2 \cdot e^{-\gamma x} \tag{5}$$

setzt und sich vorbehält, τ_{xy} und τ_{xz} dementsprechend zu bestimmen. Für $x = \infty$ verschwindet, wie es sein muß, dieser Wert von τ_{yz} bei allen Werten von y und z in Übereinstimmung mit der Lösung von de St.-V. und im Querschnittsumfange verschwindet außerdem τ_{yz} auch für jeden Wert von x, wie es die dort bestehende Grenzbedingung verlangt. Unter

k ist ein vom Verdrehungsmomente M abhängiger Festwert zu verstehen, der sich nachher ergeben wird.

Damit die letzten beiden der Gleichungen (4) erfüllt werden, hat man zu setzen

$$\left.\begin{aligned} \tau_{xy} &= -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma x} \cdot 4 k a^2 z (a^2 b^2 - b^2 y^2 - a^2 z^2) + \frac{2M}{\pi a b^3} z \\ \tau_{xz} &= -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma x} \cdot 4 k b^2 y (a^2 b^2 - b^2 y^2 - a^2 z^2) - \frac{2M}{\pi a^3 b} y. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Bei der Ausführung der Integration nach x, die zur Ableitung dieser Formeln nötig ist, hat man die letzten Glieder als von x unabhängige Integrationskonstanten beizufügen, so wie sie der Theorie von de St.-V. entsprechen. Die ersten Glieder verschwinden bei jedem Werte von x am Querschnittsumfange, so daß die Grenzbedingungen überall erfüllt sind.

Die Rechtfertigung für den in Gleichung (5) gewählten Ansatz für τ_{yz} ergibt sich jetzt daraus, daß die erste der Gleichungen (4) durch alle diese Werte identisch erfüllt wird, falls man die bisher unbestimmt gebliebene Konstante k entsprechend wählt. Eine einfache Rechnung lehrt, daß man zu diesem Zwecke

$$k = \gamma^3 \frac{a^2 - b^2}{8 \pi a^5 b^5} \cdot \frac{m+1}{m} M \quad (7)$$

zu setzen hat.

Der durch die aufgestellten Formeln beschriebene Spannungszustand genügt streng allen statischen Anforderungen mit Einschluß der Grenzbedingungen. Dabei kann der Konstanten γ noch jeder beliebige Wert beigelegt werden und um diesen Umstand ausdrücklich hervorzuheben, wurde γ vorher schon als ein „Freiwert“ bezeichnet.

Mit den aus dem elastischen Verhalten des Körpers hervorgehenden Anforderungen ist dieser Spannungszustand freilich nicht vereinbar. Die ihm entsprechenden Formänderungskomponenten müßten nämlich, wenn die Lösung streng richtig sein sollte, den „Verträglichkeitsgleichungen“ genügen und man überzeugt sich leicht, daß diese Bedingung nicht erfüllt ist.

Wir hatten aber von vornherein schon auf eine strenge Lösung der Aufgabe verzichtet und wollten uns mit einer hinreichend gut zutreffenden Näherungslösung begnügen. Wir dürfen erwarten, zu einer solchen zu gelangen, wenn wir den Freiwert γ nachträglich so bestimmen, daß er die in dem Stabe aufgespeicherte Formänderungsarbeit zu einem Minimum macht. Dieses Verfahren wurde zuerst von Ritz benutzt und wird gewöhnlich nach ihm benannt. In dem von mir gemeinschaftlich mit L. Föppl herausgegebenen Buche „Drang und Zwang" ist es ausführlich besprochen und begründet und auf zahlreiche Beispiele angewendet worden. Hier soll es genau in derselben Weise gehandhabt werden, wie es dort geschehen ist.

Wir gehen aus von der Formel für die auf die Raumeinheit bezogene Formänderungsarbeit A, nämlich

$$\mathsf{A} = \frac{1}{2G}\left[\tfrac{1}{2}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{1}{2(m+1)}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2\right],$$

die sich aber in unserem Falle wegen $\sigma_y = \sigma_z = 0$ vereinfacht zu

$$\mathsf{A} = \frac{1}{2G}\left[\frac{m}{2(m+1)}\sigma_x^2 + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2\right].$$

Die im ganzen Stabe aufgespeicherte Formänderungsarbeit A folgt daraus durch eine Integration über den Querschnitt und über die Stablänge von $x = 0$ bis $x = l$. Hierbei wollen wir annehmen, daß der Stab so lang ist, daß sich die in der Nähe des eingespannten Querschnitts auftretenden Spannungsstörungen nur auf einen kleinen Teil der ganzen Stablänge erstrecken. Unter dieser Voraussetzung kann man genau genug

$$\int_0^l e^{-\gamma x}\,dx = \int_0^\infty e^{-\gamma x}\,dx = \frac{1}{\gamma}$$

setzen. Wir bilden zuerst

$$\iint \sigma_x^2\,dF\,dx = c^2\gamma^2 \int_0^\infty e^{-2\gamma x}\,dx \int y^2 z^2\,dF, \qquad (8)$$

wobei der Buchstabe c zur Abkürzung für den Ausdruck

$$c = \frac{a^2 - b^2}{\pi a^3 b^3} \cdot \frac{2(m+1)}{m} M \tag{9}$$

dient. Führt man die Integrationen aus, so erhält man

$$\int\int \sigma_x^2 \, dF \, dx = c^2 \gamma \cdot \frac{\pi a^3 b^3}{48}. \tag{10}$$

Wir kommen jetzt zur Berechnung des Integrals

$$\int\int \tau_{xy}^2 \, dx \, dF = \frac{8 k^2 a^4}{\gamma^3} \int z^2 (a^2 b^2 - b^2 y^2 - a^2 z^2)^2 \, dF$$
$$- \frac{16 M k a}{\gamma^2 \cdot \pi b^3} \int z^2 (a^2 b^2 - b^2 y^2 - a^2 z^2) \, dF + \frac{4 M^2 l}{\pi^2 a^2 b^6} \int z^2 \, dF.$$

Die hierin noch vorkommenden Integrale über den elliptischen Querschnitt berechnet man am einfachsten, indem man die Ellipse als rechtwinkelige Projektion eines Kreises ansieht und die Integrale aus den für die Kreisfläche gültigen ableitet. Man erhält auf diesem Wege leicht

$$\int z^2 (a^2 b^2 - b^2 y^2 - a^2 z^2)^2 \, dF = \frac{\pi a^5 b^7}{24}$$
$$\int z^2 (a^2 b^2 - b^2 y^2 - a^2 z^2) \, dF = \frac{\pi a^3 b^5}{12}$$

und im ganzen ergibt sich bei Benutzung dieser Formeln

$$\int\int \tau_{xy}^2 \, dx \, dF = \frac{\pi k^2 a^9 b^7}{3 \gamma^3} - \frac{4 M k a^4 b^2}{3 \gamma^2} + \frac{M^2 l}{\pi a b^3}. \tag{11}$$

Genau ebenso kann man auch das folgende Integral berechnen und erhält dafür

$$\int\int \tau_{xz}^2 \, dx \, dF = \frac{\pi k^2 a^7 b^9}{3 \gamma^3} + \frac{4 M k a^2 b^4}{3 \gamma^2} + \frac{M^2 l}{\pi a^3 b}. \tag{12}$$

Das letzte Integral läßt sich einfacher ausrechnen und man findet dafür

$$\int\int \tau_{yz}^2 \, dx \, dF = \frac{k^2}{2 \gamma} \int (a^2 b^2 - b^2 y^2 - a^2 z^2)^4 \, dF = \frac{k^2}{2 \gamma} \cdot \frac{\pi a^9 b^9}{5}. \tag{13}$$

Die ganze Formänderungsarbeit A läßt sich aus diesen Gliedern bilden, nämlich

$$A = \frac{1}{2G}\left[\frac{m}{2(m+1)}c^2\gamma\cdot\frac{\pi a^3 b^3}{48} + \frac{\pi k^2 a^7 b^7}{3\gamma^3}(a^2+b^2)\right.$$
$$\left. - \frac{4Mka^2b^2}{3\gamma^2}(a^2-b^2) + \frac{M^2 l}{\pi a^3 b^3}(a^2+b^2) + \frac{k^2}{10\gamma}\cdot\pi a^9 b^9\right].$$

Hier sind nun noch die Werte von c und von k einzusetzen. Dabei kann man aber die Glieder durch Herausheben gemeinschaftlicher Faktoren erheblich zusammenziehen, so daß man auf einen verhältnismäßig einfach gebauten Ausdruck gelangt. Er lautet

$$A = \frac{1}{2G}\cdot\binom{m+1}{m}^2 M^2\cdot\frac{(a^2-b^2)^2}{8\pi a^3 b^3}\left[\gamma^5\cdot\frac{a^2b^2}{80} + \gamma^3\cdot\frac{a^2+b^2}{24} - \frac{m}{m+1}\gamma\right]$$
$$+ \frac{1}{2G}\cdot\frac{M^2(a^2+b^2)}{\pi a^3 b^3}\,l. \qquad (14)$$

Diesen Ausdruck differentiieren wir nach γ und setzen den Differentialquotienten gleich Null. Damit erhalten wir für γ die Bestimmungsgleichung

$$\gamma^4 a^2 b^2 + 2\gamma^2(a^2+b^2) = \frac{16m}{m+1}. \qquad (15)$$

Durch Auflösen ergibt sich zunächst

$$ab\gamma^2 = -\frac{a^2+b^2}{ab} \pm \sqrt{\frac{(a^2+b^2)^2}{a^2b^2} + \frac{16m}{m+1}}.$$

Für γ ist nur eine Wurzel brauchbar, da den Bedingungen der Aufgabe gemäß γ notwendig reell und positiv sein muß.

Im wesentlichen ist hiermit die Aufgabe bereits gelöst. Nachdem γ bekannt ist, findet man nämlich nicht nur alle Spannungskomponenten nach den dafür aufgestellten Formeln, sondern auch der Verdrehungswinkel des Stabes, auf den es für die weitere Verwendung der Theorie hauptsächlich ankommt, kann nachträglich ebenfalls leicht daraus berechnet werden. Bezeichnet man diesen Winkel mit $\Delta\varphi$, wobei durch das Zeichen Δ darauf hingewiesen werden soll, daß der Winkel

jedenfalls als klein anzusehen sein wird, so folgt $\Delta\varphi$ aus der Arbeitsgleichung

$$\tfrac{1}{2} M \Delta\varphi = A, \tag{16}$$

in die man A aus Gleichung (14) einzusetzen hat.

Es bleibt nur noch übrig, an einigen Zahlenbeispielen zu zeigen, was man ungefähr zu erwarten hat. Hierfür soll, wie üblich, die Poissonsche Konstante $m = 4$ gesetzt werden. Für den kreisförmigen Querschnitt, also für $a = b$ folgt aus Gleichung (15)

$$\gamma = 1{,}45 \cdot \frac{1}{a}.$$

Freilich handelt es sich dabei nur um einen Grenzfall, in dem unsere Formeln ihre Bedeutung verlieren. Mit $a = b$ wird nämlich k nach Gleichung (7) zu Null und hiermit verschwinden alle Glieder in den Spannungskomponenten, in denen γ vorkommt, so daß nur noch die von de St.-V. gegebene Lösung übrig bleibt.

Als zweites Zahlenbeispiel betrachten wir den Fall $a = 10\,b$, der einer schon recht stark abgeplatteten Querschnittsellipse entspricht. Hierfür ergibt sich

$$\gamma = 0{,}265 \cdot \frac{1}{a} = 0{,}265 \cdot \frac{1}{b}.$$

Für die Berechnung von A ziehen wir die in der eckigen Klammer von Gleichung (14) vorkommenden Glieder zusammen zu

$$\gamma\left[\gamma^4 \cdot \frac{a^2 b^2}{80} + \gamma^2 \cdot \frac{a^2 + b^2}{24} - \frac{4}{5}\right] = \gamma\left[\frac{0{,}49}{80} + \frac{7{,}07}{24} - 0{,}8\right] = -\,0{,}50\,\gamma.$$

Der von γ abhängige Teil des Ausdruckes für A wird hiernach negativ und man überzeugt sich auch leicht, daß er bei allen überhaupt in Betracht kommenden Abplattungen negativ ausfallen wird. Das ließ sich von vornherein erwarten, da die Einspannung des Anfangsquerschnitts eine Erschwerung der elastischen Formänderung mit sich bringt, die nur eine Verminderung, aber keine Vermehrung der elastischen Formänderungsarbeit zur Folge haben kann.

Hierauf ergibt sich beim weiteren Ausrechnen von A nach Gleichung (14)

$$A = \frac{M^2}{2\,G\,\pi\,b^3}\left(1{,}01\,\frac{l}{a} - 0{,}25\right)$$

und für den Verdrehungswinkel $\Delta\varphi$ folgt aus Gleichung (16), wenn man den Wert von π einsetzt und a durch b ersetzt

$$\Delta\varphi = \frac{M}{G\,b^3}\left(0{,}032\,\frac{l}{b} - 0{,}08\right).$$

Das erste Glied in der Klammer entspricht dem Verdrehungswinkel für den Fall ungehinderter Querschnittswölbung und das zweite Glied der Verminderung, die durch die Einspannung des Anfangsquerschnitts herbeigeführt wird. Diese Verminderung ist eben so groß, als wenn die Stablänge l um $2{,}5\,b$ verkürzt wäre. Für einen Abstand $x = 2{,}5\,b$ vom Einspannquerschnitte wird andererseits $\gamma x = 0{,}66$ und $e^{-\gamma x} = 0{,}41$. Bis zu dieser Stelle hin haben sich daher die in den Gleichungen (3) bis (6) für die Spannungskomponenten auftretenden, mit γ behafteten Glieder bereits auf 0,41 ihres Wertes im Einspannquerschnitt vermindert.

Wir berechnen weiter die Normalspannung σ_x im Einspannquerschnitt. Für den Fall $a = 10\,b$ erhält man dafür nach Gleichung (3)

$$\sigma_x = 0{,}021\,\frac{yz}{b^5}\,M.$$

Der größte Wert, den σ_x annimmt, sei mit $\sigma_{\max}$ bezeichnet. Diese Spannung tritt am Umfange des Einspannquerschnitts an jener Stelle auf, für die yz den größtmöglichen Wert $\frac{ab}{2}$ oder jetzt $5\,b^2$ erreicht. Hiermit folgt

$$\sigma_{\max} = 0{,}105\,\frac{M}{b^3}.$$

Wir vergleichen diesen Wert mit der größten Schubspannung $\tau_{\max}$, die im Stabe vorkommt. Diese entspricht der von de St.-V. aufgestellten Formel, da im Einspannquerschnitt

oder in seiner Nähe keine Vergrößerung von τ über das im völlig freien Stabe vorkommende Maß hinaus stattfindet. Man hat daher

$$\tau_{\max} = \frac{2M}{\pi a b^2} = 0{,}0637 \frac{M}{b^3}.$$

Der Vergleich lehrt, daß die absolut größte Spannung im im Einspannquerschnitt auftritt und daß $\sigma_{\max}$ für den Fall $a = 10\,b$ das 1,65-fache von $\tau_{\max}$ ausmacht. Hierbei ist jedoch zu beachten, daß für die meisten Baustoffe die Schubbeanspruchung an sich gefährlicher ist als eine gleich große Zug- oder Druckbeanspruchung. In der Regel wird daher keine besondere Erhöhung der Bruchgefahr durch die Einspannung zu erwarten sein.

Endlich kann man auch noch den Grenzfall ins Auge fassen, daß a als unendlich groß gegen b angesehen werden kann. Praktisch ist dieser Fall insofern von Bedeutung, als er zugleich auch eine ungefähre Abschätzung dafür ermöglicht, wie die Verhältnisse bei einem rechteckigen Querschnitt von dem gleichen Seitenverhältnisse ungefähr liegen dürften. Für diesen Fall erhält man als Lösung von Gleichung (15)

$$a\gamma = \sqrt{\frac{8m}{m+1}} = 2{,}53$$

und wenn man diesen Wert in Gleichung (14) einführt und hierauf $\Delta\varphi$ nach Gleichung (16) berechnet, ergibt sich

$$\Delta\varphi = \frac{M}{G\pi b^3}\left(\frac{l}{a} - 0{,}26\right),$$

was mit dem Falle $a = 10\,b$ fast ganz übereinstimmt. Endlich erhält man noch für $\sigma_{\max}$ in derselben Weise wie vorher

$$\sigma_{\max} = 3{,}16 \frac{M}{\pi a b^2}$$

oder das 1,58-fache von $\tau_{\max}$ für denselben Fall.

Über eine Konvergenzbedingung für unendliche Reihen, die durch iterierte Mittelbildung reduzibel sind.

Von **Alfred Pringsheim.**

Vorgetragen in der Sitzung am 8. Mai 1920.

Bei der Abfassung des Nachtrages[1]) zu meiner Mitteilung: „Über die Äquivalenz der sogenannten Hölderschen und Cesàroschen Grenzwerte etc.“[2]) war es mir entgangen, daß Herr E. Landau in einer umfangreichen Abhandlung: „Über die Bedeutung einiger neuer Grenzwertsätze der Herren Hardy und Axer“[3]), die am Schlusse jenes Nachtrages von mir erwähnten Hardyschen Sätze unter gleichzeitiger Erweiterung ihrer Voraussetzung aufs neue bewiesen hat. An die Stelle der Hardyschen Voraussetzung:

$$\text{(I)} \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} |n a_n| < +\infty$$

tritt dabei, unter der (prinzipiell unwesentlichen) Beschränkung auf reelle a_n die folgende[4]):

$$\text{(II a)} \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}} n a_n > -\infty ,$$

d. h. die Zahlen $n a_n$ werden nicht, wie bei Hardy als schlechthin beschränkt, sondern lediglich als nach unten be-

[1]) Diese Berichte, Jahrg. 1918, S. 89.

[2]) Ebendas., Jahrg. 1916, S. 209.

[3]) Warschauer Berichte, 1910, S. 97—177.

[4]) A. a. O., S. 99. Die in Frage kommenden Sätze sind die in der Landauschen Arbeit mit Satz III (S. 107) und Satz IV (S. 109) bezeichneten, deren zweiter den ersten als speziellen Fall enthält. Herr Landau gibt für diesen Satz IV zwei Beweise. Bei dem zweiten wird Satz III als schon bewiesen vorausgesetzt, während der erste dieses Hilfsmittel nicht in Anspruch nimmt.

schränkt vorausgesetzt. Da es sich in dem vorliegenden Zusammenhange um die Konvergenz der Reihe Σa_n handelt und diese stets gleichzeitig mit der Reihe $\Sigma(-a_n)$ konvergiert oder divergiert, so würde es freistehen, die Zahlen a_n von vornherein durch die $(-a_n)$ und demgemäß die Bedingung (IIa) durch die folgende:

$$\varlimsup_{n\to\infty}(-na_n) > -\infty,$$

anders geschrieben:

$$\varlimsup_{n\to\infty} na_n < +\infty, \tag{IIb}$$

zu ersetzen, so daß es zweckmäßig erscheinen dürfte, die fragliche Bedingung etwas allgemeiner so zu fassen: es wird nur verlangt, daß die Zahlen na_n (zum mindesten) einseitig beschränkt sind.

Der Hardysche Beweis für den in Frage kommenden Hauptsatz, daß nämlich unter der Voraussetzung (I) die Reduzibilität der Reihe Σa_n stets deren Konvergenz nach sich zieht, beruht auf der Benützung der Cesàroschen Grenzwerte und zwar, wie es scheint und am Schlusse des oben erwähnten Nachtrags von mir ausdrücklich ausgesprochen wurde, so wesentlich, daß es schwerlich gelingen dürfte, sie in diesem Zusammenhange durch die gewisse formale Vorzüge besitzenden[1]) Hölderschen Mittelbildungen zu ersetzen. Dagegen operiert Herr Landau bei seinen zwei Beweisen für den (durch Beschränkung auf die Forderung (II a) erweiterten) Satz ausschließlich mit den Hölderschen Grenzwerten. Doch scheinen mir die hierdurch ermöglichten Vorteile nicht genügend ausgenützt worden zu sein, um den betreffenden Beweisen den erreichbaren Grad von Einfachheit zu verleihen. Bei der Merkwürdigkeit und unbestreitbaren Nützlichkeit des fraglichen Satzes hielt ich es daher nicht für überflüssig, im folgenden eine Beweisanordnung mitzuteilen, die, mit Beibehaltung gewisser nach Angabe des Herrn Landau von den Herren de la Vallée Poussin und H. Bohr herrührender Grundgedanken, zum guten

[1]) Vgl. a. a. O. (Jahrg. 1918), S. 90.

Teil vermöge der größeren Zweckmäßigkeit der von mir benützten, übrigens der bisher üblichen Sprache der Analysis sich ohne weiteres anpassenden Bezeichnungen an Durchsichtigkeit und Kürze kaum etwas zu wünschen übrig lassen dürfte. Ich knüpfe schließlich daran einige Bemerkungen zur Beantwortung der Frage, ob der Satz mit der erweiterten Voraussetzung (IIa) bzw. (IIb) in einem noch näher zu präzisierenden Sinne eine größere Tragweite besitzt, als mit der ursprünglichen Hardyschen Voraussetzung (I), und zeige, daß diese Entscheidung in bejahendem Sinne ausfällt.

Die iterierten Mittelwerte für die Reihe $\sum_0^\infty \nu\, a_\nu$ werden definiert[1]) durch die Rekursionsformel ($\varkappa = 0, 1, 2, \ldots$):

$$(1)\quad \mathfrak{M}_{\varkappa+1}(s_\nu) = \frac{1}{\nu+1}\left\{\mathfrak{M}_\varkappa(s_0) + \mathfrak{M}_\varkappa(s_1) + \cdots + \mathfrak{M}_\varkappa(s_\nu)\right\}$$

mit der Anfangsgleichung:

$$(1_0)\qquad \mathfrak{M}_0(s_\nu) = s_\nu = a_0 + a_1 + \cdots + a_\nu.$$

Aus (1) folgt umgekehrt, daß (für $\varkappa = 0, 1, 2, \ldots$):

$$(2)\quad \begin{aligned}\mathfrak{M}_\varkappa(s_\nu) &= (\nu+1)\,\mathfrak{M}_{\varkappa+1}(s_\nu) - \nu\,\mathfrak{M}_{\varkappa+1}(s_{\nu-1})\\ &= \mathfrak{M}_{\varkappa+1}(s_\nu) + \nu\left\{\mathfrak{M}_{\varkappa+1}(s_\nu) - \mathfrak{M}_{\varkappa+1}(s_{\nu-1})\right\}.\end{aligned}$$

Andererseits gewinnt man aus der unmittelbar ersichtlichen Beziehung:

$$s_\nu = \mathfrak{M}_1(s_\nu) + \mathfrak{M}_1(\nu a_\nu)$$

durch $\varkappa$-malige Mittelwertbildung die folgende[2]):

$$(3)\qquad \mathfrak{M}_\varkappa(s_\nu) = \mathfrak{M}_{\varkappa+1}(s_\nu) + \mathfrak{M}_{\varkappa+1}(\nu a_\nu),$$

deren Vergleichung mit (2) ergibt, daß:

$$(4)\quad \mathfrak{M}_{\varkappa+1}(\nu a_\nu) = \nu\left\{\mathfrak{M}_{\varkappa+1}(s_\nu) - \mathfrak{M}_{\varkappa+1}(s_{\nu-1})\right\}\quad (\varkappa = 0, 1, 2, \ldots)^3).$$

---

[1]) Vgl. Jahrg. 1916, S. 212, Gl. (I).

[2]) Vgl. Jahrg. 1918, S. 90, Gl. (2). Auf der rechten Seite dieser Gleichung steht infolge eines Druckfehlers $\mathfrak{M}_{n+1}(s_n)$ statt $\mathfrak{M}_{\varkappa+1}(s_n)$.

[3]) Diese Beziehung gilt offenbar auch noch für $\varkappa = -1$, da sie in diesem Falle mit Berücksichtigung von Gl. (1_0) die Form annimmt:

$$\nu a_\nu = \nu(s_\nu - s_{\nu-1}).$$

Diese Relation bildet die Hauptgrundlage für den Beweis des folgenden („Hardy-Landauschen") Satzes:

Für die *Konvergenz* einer bereits als *reduzibel* erkannten Reihe Σa_ν mit *reellen* Gliedern ist *hinreichend*, daß:

(II b) $$\lim_{n\to\infty} n a_n < +\infty$$ [1]).

Beweis. Da die Reihe als reduzibel vorausgesetzt wird, so muß für irgend ein bestimmtes $k \geq 0$ eine Beziehung von der Form bestehen:

(5) $$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{M}_{k+1}(s_n) = s.$$

Wir zeigen, daß dann infolge der Voraussetzung (II b) auch:

(5 a) $$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{M}_k(s_n) = s,$$

und da es freistände, auf Grund dieses Ergebnisses die fragliche Schlußweise beliebig fortzusetzen, so würde auf diesem Wege schließlich sich ergeben, daß:

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{M}_0(s_n) = s, \text{ also: } \lim_{n\to\infty} s_n = s,$$

d. h. daß die Reihe $\sum_0^\infty \nu a_\nu$ gegen die Summe s konvergiert.

Es handelt sich also lediglich um den Nachweis, daß aus (5) allemal (5 a) folgt.

Man hat nun infolge der Voraussetzung (II b) bei passend gewähltem $A > 0$ (für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$):

$$\nu a_\nu < A,$$

also auch:

$$\mathfrak{M}(\nu a_\nu) < A,$$

und durch Fortsetzung dieser Schlußweise:

$$\mathfrak{M}_\varkappa(\nu a_\nu) < A \text{ (für } \varkappa = 0, 1, 2, \ldots),$$

anders geschrieben, mit Berücksichtigung von Gl. (4) und der zugehörigen Fußnote 3):

[1]) Nach dem in der Einleitung Gesagten könnte man selbstverständlich statt der Voraussetzung (II b) auch die Voraussetzung (II a) zum Ausgangspunkte nehmen.

$$(6) \quad \nu\{\mathfrak{M}_\varkappa(s_\nu) - \mathfrak{M}_\varkappa(s_{\nu-1})\} < A \text{ (für } \varkappa = 0, 1, 2, \ldots).$$

Setzt man speziell $\varkappa = k$, so folgt insbesondere, daß:

$$(7) \quad \mathfrak{M}_k(s_\nu) - \mathfrak{M}_k(s_{\nu-1}) < \frac{A}{\nu}.$$

Nun seien n, n' irgend zwei natürliche Zahlen und zwar:

$$n' < n,$$

ferner bedeute ν zunächst jede ganze Zahl des Intervalls:

$$(8) \quad n - n' < \nu < n,$$

so findet man für jedes solche ν auf Grund von Ungl. (7) *a fortiori*:

$$(9) \quad \mathfrak{M}_k(s_\nu) - \mathfrak{M}_k(s_{\nu-1}) < \frac{A}{n - n'}.$$

Ersetzt man hier ν, bei vorläufigem Ausschluß von $\nu = n$, der Reihe nach durch $\nu + 1$, $\nu + 2$, $\ldots n$, so ergibt sich durch Addition der so entstehenden $n - \nu$ Ungleichungen:

$$(10) \quad \mathfrak{M}_k(s_n) - \mathfrak{M}_k(s_\nu) < \frac{n - \nu}{n - n'} \cdot A < \frac{n'}{n - n'} \cdot A \quad \text{(nach dem ersten Teil von Ungl. (8))},$$

und diese Ungleichung gilt dann *eo ipso* auch noch für $\nu = n$. Summiert man jetzt Ungleichung (10) nochmals über die n'-Werte: $\nu = n - n' + 1$, $n - n' + 2$, $\ldots$, n, so folgt weiter:

$$n' \cdot \mathfrak{M}_k(s_n) - \sum_{n-n'+1}^{n} {}^{\nu} \mathfrak{M}_k(s_\nu) < \frac{n'^2}{n - n'} \cdot A$$

und daher:

$$(11) \quad \mathfrak{M}_k(s_n) < \frac{1}{n'} \sum_{n-n'+1}^{n} {}^{\nu} \mathfrak{M}_k(s_\nu) + \frac{n'}{n - n'} \cdot A.$$

Es bedeute jetzt zweitens ν eine Zahl des Intervalls:

$$(12) \quad n < \nu \leq n + n',$$

so hat man nach Ungleichung (7) für jedes solche ν wiederum *a fortiori*:

$$(13) \quad \mathfrak{M}_k(s_\nu) - \mathfrak{M}_k(s_{\nu-1}) < \frac{A}{n}.$$

Ersetzt man hier ν der Reihe nach durch $\nu - 1$, $\nu - 2$, ..., $n + 1$ und addiert die so entstehenden Ungleichungen zu Ungleichung (13), so folgt:

$$\mathfrak{M}_k(s_\nu) - \mathfrak{M}_k(s_n) < \frac{\nu - n}{n} \cdot A$$

$$< \frac{n'}{n} \cdot A \quad \text{(nach dem zweiten Teil von Ungl. (12))},$$

und daher:

$$\mathfrak{M}_k(s_n) > \mathfrak{M}_k(s_\nu) - \frac{n'}{n} \cdot A. \tag{14}$$

Summiert man diese Ungleichung über die n' Werte: $\nu = n + 1, n + 2, \ldots, n + n'$, und dividiert das Resultat durch n', so kommt:

$$\mathfrak{M}_k(s_n) > \frac{1}{n'} \sum_{n+1}^{n+n'} \mathfrak{M}_k(s_\nu) - \frac{n'}{n} \cdot A. \tag{15}$$

Nun ist allgemein für $p < q$:

$$\sum_{p+1}^{q} \mathfrak{M}_k(s_\nu) = \sum_{0}^{q} \mathfrak{M}_k(s_\nu) - \sum_{0}^{p} \mathfrak{M}_k(s_\nu)$$

$$= (q + 1)\,\mathfrak{M}_{k+1}(s_q) - (p + 1)\,\mathfrak{M}_{k+1}(s_p),$$

anders geschrieben:

$$\sum_{p+1}^{q} \mathfrak{M}_k(s_\nu) \begin{cases} = (q+1)\{\mathfrak{M}_{k+1}(s_q) - \mathfrak{M}_{k+1}(s_p)\} + (q-p)\mathfrak{M}_{k+1}(s_p) \\ = (p+1)\{\mathfrak{M}_{k+1}(s_q) - \mathfrak{M}_{k+1}(s_p)\} + (q-p)\mathfrak{M}_{k+1}(s_q). \end{cases} \tag{16}$$

Wendet man die erste dieser Formeln auf die rechte Seite von Ungl. (11), die zweite auf diejenige von Ungl. (15) an, so ergibt sich:

$$\mathfrak{M}_k(s_n) \begin{cases} < \frac{n+1}{n'}\{\mathfrak{M}_{k+1}(s_n) - \mathfrak{M}_{k+1}(s_{n-n'})\} + \mathfrak{M}_{k+1}(s_{n-n'}) + \frac{n'}{n-n'} \cdot A \\ > \frac{n+1}{n'}\{\mathfrak{M}_{k+1}(s_{n+n'}) - \mathfrak{M}_{k+1}(s_n)\} + \mathfrak{M}_{k+1}(s_{n+n'}) - \frac{n'}{n} \cdot A. \end{cases} \tag{17}$$

Nun werde gesetzt:

$$n' = [\varepsilon n], \quad \text{wo: } \varepsilon > 0,$$

so daß also:

$$\lim_{n\to\infty}(n\pm n')=\infty,\ \lim_{n\to\infty}\frac{n'}{n}=\varepsilon,\ \lim\frac{n'}{n-n'}=\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon},\ \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n'}=\frac{1}{\varepsilon}.$$

Da sodann mit Berücksichtigung von Gleichung (5):

$$\lim_{n\to\infty}\mathfrak{M}_{k+1}(s_{n+n'})\,s_{n\pm n'}=\lim_{n\to\infty}\mathfrak{M}_{k+1}(s_n)\,s_n=s,$$

so folgt aus (17) für $n\longrightarrow\infty$:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\mathfrak{M}_k(s_n)\begin{cases}\leqq s+\dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\cdot A\\ \geqq s-\varepsilon\cdot A\end{cases}\tag{18}$$

und, da es freisteht, ε unbegrenzt zu verkleinern[1]), schließlich in Übereinstimmung mit Gleichung (5a):

$$\lim_{n\to\infty}\mathfrak{M}_k(s_n)=s,$$

womit der oben ausgesprochene Satz bewiesen ist.

Die Frage, ob der Satz in der eben bewiesenen Fassung eine größere Tragweite besitzt, als in der ursprünglich von Herrn Hardy angegebenen, ist nicht ohne weiteres zu bejahen (wie es bei oberflächlicher Betrachtung vielleicht den Anschein haben dürfte). Der Satz lehrt, daß die als reduzibel vorausgesetzte Reihe Σa_ν konvergiert, wenn nur so viel feststeht, daß die Zahlen νa_ν einseitig beschränkt sind. Dadurch wird die Anwendbarkeit des Satzes im Vergleich zu der Hardyschen Fassung sicherlich erleichtert, möglicherweise auch erweitert (es könnte ja, auch wenn vollständige

[1]) Das läuft also darauf hinaus, daß die früher eingeführten Zahlen n' schließlich der Bedingung $n'\prec n$ unterworfen werden. Doch wäre, wie ein Blick auf die Ungleichungen (17) lehrt, das gewünschte Endresultat nicht erzielt worden, wenn man diese Bedingung ohne weiteres in (17) eingeführt hätte. Der sinnreiche Kunstgriff, den erforderlichen Grenzprozeß, wie geschehen, in zwei nach einander auszuführende zu zerlegen, dürfte von Herrn de la Vallée Poussin herrühren.

Beschränktheit der Zahlen νa_ν vorhanden sein sollte, auf unüberwindliche Schwierigkeiten stoßen, mehr als die einseitige wirklich festzustellen). Ob aber der Geltungsbereich des Satzes an Umfang gewonnen hat, hängt doch von der Beantwortung der folgenden Frage ab: Gibt es überhaupt konvergente Reihen Σa_ν, bei denen die Zahlen νa_ν nur einseitig beschränkt sind? Für den Fall (zum mindesten von einer bestimmten Stelle ab) durchweg gleichbezeichneter a_ν macht es keine Schwierigkeit, die obige Frage zu bejahen. Hätte man etwa durchweg $a_\nu > 0$, und $\overline{\lim_{\nu\to\infty}} \nu a_\nu < \infty$ (z. B. $\lim_{\nu\to\infty} \nu a_\nu = 0$, was ja insbesondere der Fall sein muß, wenn Σa_ν konvergiert und die a_ν eine monotone Folge bilden), so lassen sich die a_ν in eine Folge (a'_ν) umordnen[1]), für welche die Beziehung $\overline{\lim_{\nu\to\infty}} \nu a'_\nu = +\infty$ besteht, während andererseits die Beschränktheit der Zahlen $\nu a'_\nu$ nach unten, sowie die Konvergenz der Reihe $\Sigma a'_\nu$ erhalten bleibt. Doch bietet dieser Fall, wie auch der sogleich zu besprechende und ganz analog zu behandelnde der absoluten (also unbedingten) Konvergenz in dem vorliegenden Zusammenhange kein besonderes Interesse.

Angenommen die Reihe $\sum_1^\infty \nu a_\nu$ enthalte unendlich viele Glieder beiderlei Vorzeichens, so mögen die positiven mit

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu \ldots,$$

die negativen mit

$$-\beta_1, -\beta_2, \ldots, -\beta_\nu \ldots$$

bezeichnet werden. Wegen der Konvergenz von Σa_ν sind dann die Reihen $\Sigma \alpha_\nu$, $\Sigma \beta_\nu$ entweder beide konvergent oder beide divergent. Im ersten Falle ist Σa_ν unbedingt konvergent und, wenn $\lim_{\nu\to\infty} \nu \alpha_\nu < \infty$, $\overline{\lim_{\nu\to\infty}} \nu \beta_\nu < \infty$ vorausgesetzt wird, so

[1]) S. Math. Ann. 35 (1890), S. 344 — oder auch meine „Vorlesungen über Zahlenlehre", Abt. II (1916), S. 353.

steht es frei, ohne die Konvergenz der Reihe zu stören, die a_ν so weit hinauszuschieben, daß für die jetzt etwa mit $\Sigma a'_\nu$ zu bezeichnende Reihe $\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\, \nu a'_\nu = +\infty$ wird, während $\underline{\lim_{\nu\to\infty}}\, \nu a'_\nu > -\infty$ bleibt, bzw. durch hinlängliches Hinausschieben der β_ν das entgegengesetzte Resultat zu erzielen.

Sind dagegen die Reihen Σa_ν, $\Sigma \beta_\nu$ beide divergent, so tritt bei der Reihe Σa_ν der (für nutzbringende Anwendung des fraglichen Satzes wohl ausschließlich in Betracht kommende) Fall bedingter Konvergenz ein, bei dem also die Zulässigkeit einer Gliederumordnung an verhältnismäßig enge Grenzen gebunden und daher das zuvor eingeschlagene Verfahren nicht ohne weiteres anwendbar ist. Und da ja die bedingte Konvergenz nur dadurch zu Stande kommt, daß bei gleichzeitiger Unbeschränktheit von $\sum_1^n{}^\nu a_\nu$ und $\sum_1^n{}^\nu \beta_\nu$ zwischen den a_ν einerseits und den $(-\beta_\nu)$ andererseits ein gewisses Gleichgewicht besteht, so ist die Vermutung nicht von vornherein abzuweisen, daß vielleicht im Falle der Konvergenz von Σa_ν die Zahlen νa_ν entweder nach beiden Seiten beschränkt oder nach beiden Seiten unbeschränkt sein müßten[1]). Daß dies aber tatsächlich nicht zutrifft, läßt sich folgendermaßen zeigen. Es mögen die a_ν, β_ν so angenommen werden, daß:

$$a_\nu > \beta_\nu, \quad \overline{\lim_{\nu\to\infty}}\, \nu a_\nu = +\infty, \quad \overline{\lim_{\nu\to\infty}}\, \nu \beta_\nu < +\infty.$$

Man kann dann die a_ν, $(-\beta_\nu)$ nach dem bekannten Riemannschen Verfahren zu einer bedingt konvergenten Reihe Σa_ν mit vorgeschriebener Summe, z. B. mit der Summe 0, zusammenfassen[2]). Dabei werden infolge der er-

---

[1]) Einfaches Beispiel für beide Eventualitäten:

$$\sum_1^\infty{}^\nu \frac{1}{\nu} \cos \nu x, \quad \sum_1^\infty{}^\nu \frac{1}{\sqrt{\nu}} \cos \nu x,$$

wo $x \neq 2k\pi$ $(k = 0, +1, +2, \ldots)$.

[2]) Die beiden Anfangsglieder der Reihe Σa_ν lauten in diesem Falle: $a_1 - \beta_1$.

sten der obigen Bedingungen die negativen Glieder $(-\beta_\nu)$ wesentlich häufiger auftreten, als die positiven α_ν. Bezeichnet man nun die positiven Glieder mit α_{p_ν}, die negativen mit α_{n_ν}, so ist für $\nu > 1$ durchweg:

$$p_\nu > \nu,$$

da ja jede beliebige Anzahl von (mindestens zwei) Anfangsgliedern auch negative Glieder enthält und zwar nach dem zuvor gesagten zum mindesten von einem gewissen ν ab mehr als die Hälfte, so daß alsdann andererseits für die α_{n_ν} sich ergibt:

$$\nu > \frac{1}{2} n_\nu, \qquad \text{also: } n_\nu < 2\nu.$$

Daraus folgt aber, daß:

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}} p_\nu \alpha_{p_\nu} \geq \overline{\lim_{\nu\to\infty}} \nu \alpha_\nu = +\infty, \quad \overline{\lim_{\nu\to\infty}} n_\nu |\alpha_{n_\nu}| \leq \overline{\lim_{\nu\to\infty}} 2\nu\beta_\nu < +\infty,$$

anders geschrieben:

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}} \nu \alpha_\nu = +\infty, \quad \underline{\lim_{\nu\to\infty}} \nu \alpha_\nu > -\infty,$$

d. h. die Zahlen $\nu\alpha_\nu$ sind nach oben unbeschränkt, nach unten beschränkt. Es gibt also auch bedingt konvergente Reihen $\Sigma\alpha_\nu$, bei welchen die Zahlen $\nu\alpha_\nu$ nur einseitig beschränkt sind und die infolgedessen nicht auf den ursprünglichen Hardyschen Satz, wohl aber auf dessen Landausche Verallgemeinerung reagieren würden.

Geometrisches über die Verteilung der Nullstellen gewisser ganzer transzendenter Funktionen.

Von **Georg Pólya** in Zürich.

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 8. Mai 1920.

Es handelt sich im folgenden um ganze transzendente Funktionen von der Form

$$F(z) = P_1(z)\, e^{a_1 z} + P_2(z)\, e^{a_2 z} + \cdots + P_m(z)\, e^{a_m z},$$

wo $a_1, a_2, \ldots a_m$ voneinander verschiedene Konstanten und $P_1(z), P_2(z), \ldots P_m(z)$ Polynome sind $(m > 1)$. Diese Funktionen bieten sich ungezwungen der Betrachtung dar, als die Lösungen von linearen homogenen Differential- oder Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten. Die asymptotische Verteilung ihrer Nullstellen folgt einfachen und eleganten geometrischen Gesetzen, die, soweit mir bekannt, bisher unbemerkt geblieben sind, und die ich in diesen Zeilen darstellen will. Um nicht weitläufig zu werden, will ich die Beweise nur kurz andeuten. Denn einerseits lassen sich diese Beweise mit geläufigen Mitteln führen. Andererseits soll der Gegenstand ausführlich behandelt, in feinere Einzelheiten verfolgt und weitergeführt werden in einer von mir veranlaßten Zürcher Dissertation.

1. Man betrachte in der komplexen Zahlenebene die m Punkte

$$a_1, a_2, a_3, \cdots a_m.$$

Das kleinste konvexe Polygon, das diese m Punkte umfaßt, soll mit $\mathfrak{A}$ bezeichnet werden. $\mathfrak{A}$ kann sich eventuell auf eine Strecke reduzieren, jedoch nie auf einen Punkt, da $m > 1$. Ich bezeichne mit $\bar{\mathfrak{A}}$ das kleinste konvexe Polygon, das die m konjugiert komplexen Punkte

$$\bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\ \bar{a}_3,\ \cdots\ \bar{a}_m$$

umfaßt. $\mathfrak{A}$ und $\bar{\mathfrak{A}}$ sind Spiegelbilder voneinander in Bezug auf die reelle Achse. $\mathfrak{A}$ und $\bar{\mathfrak{A}}$ haben gleich viel, sagen wir l Ecken ($l < m$). Es sei die Bezeichnung so gewählt, daß die in positivem Umlaufssinn aufeinander folgenden Ecken von $\mathfrak{A}$ $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_l$ heißen.

Die Nullstellen von $F(z)$ häufen sich gegen l verschiedene Halbstrahlen, die den äußeren Normalen des Polygons $\bar{\mathfrak{A}}$ parallel sind.

Mit anderen Worten und genauer beschrieben heißt das folgendes: man errichte von dem Punkt $z = 0$ aus l Halbstrahlen, die bzw. den Vektoren

$$i(\bar{a}_2 - \bar{a}_1),\ i(\bar{a}_3 - \bar{a}_2),\ \cdots\ i(\bar{a}_1 - \bar{a}_l)$$

parallel sind. Man umgebe jeden Halbstrahl mit einem Winkelraum, den der betreffende Halbstrahl halbiert, dessen Spitze der Nullpunkt und dessen Öffnung ε ist. Es sei ε so klein gewählt, daß diese Winkelräume sich nicht überdecken. Wie klein auch die positive Größe ε sein mag, es befinden sich außerhalb der beschriebenen l Winkelräume von der Gesamtöffnung $l\varepsilon$ nur endlich viele Wurzeln von $F(z)$.

Zum Beweise betrachte man die beiden von $z = 0$ ausgehenden Vektoren $i(\bar{a}_\lambda - \bar{a}_{\lambda-1})$ und $i(\bar{a}_{\lambda+1} - \bar{a}_\lambda)$, deren Verlängerungen, und den durch diese Verlängerungen begrenzten Winkelraum ($\lambda = 1, 2, \ldots l$). In jedem Winkelraum, der die Spitze im Punkte $z = 0$ hat, aber sonst ganz im Innern des eben beschriebenen liegt, ist gleichmäßig

$$\lim_{z=\infty} \frac{F(z)}{P_\lambda(z)\, e^{a_\lambda z}} = 1.$$

2. Es sei s die Länge einer bestimmten Seite des Polygons $\mathfrak{A}$. Die Anzahl derjenigen Nullstellen von $F(z)$, die sich der zur besagten Seite senkrechten Richtung anschließen und einen absoluten Betrag unterhalb r haben, ist asymptotisch $\frac{rs}{2\pi}$ bis auf einen Fehler, der durch $\lg r$ dividiert beschränkt bleibt.

Man schließe, wie vorher, die fragliche Richtung in einen Winkelraum von der Öffnung ε ein, und schneide aus dem Winkelraum einen Kreissektor aus; Mittelpunkt des Kreises ist $z = 0$, sein Radius r. Es handelt sich um die asymptotische Anzahl der Nullstellen innerhalb dieses Sektors, wobei ε beliebig, jedoch fest und r als unbeschränkt wachsend angenommen ist. Es folgt aus dem ausgesprochenen Satze, in Verbindung mit 1, daß die asymptotische Anzahl der Nullstellen von $F(z)$ innerhalb eines Kreises vom Radius r mit dem Mittelpunkt $z = 0$ gleich ist $\frac{r}{2\pi} \times$ Umfang von $\mathfrak{A}$.

Der Satz wird natürlich durch die Betrachtung des Integrals $\frac{1}{2\pi i} \int \frac{F'(z)}{F(z)}\, dz$ bewiesen. Es empfiehlt sich nicht, dieses Integral um die Grenzen des fraglichen Sektors herum zu erstrecken, sondern um die Grenzen eines andern Gebietes, das ich nur in dem Falle beschreibe, daß die fragliche Seite von $\mathfrak{A}$ die Richtung der positiven reellen x-Achse hat und folglich der dazugehörige Verdichtungshalbstrahl der Nullstellen die positive imaginäre y-Achse ist. In diesem Falle (worauf ein beliebiger anderer Fall durch eine passende Drehung der Ebene zurückgeführt werden kann) besteht der zweckmäßige Integrationsweg 1) aus einem Stück der Kurve $x = k \lg y$ von $x = 0$, $y = 1$ bis $y = r$; 2) aus einer nach links gerichteten horizontalen Strecke von der Länge $2k \lg r$; 3) aus einem Stück der Kurve $x = -k \lg y$ von $y = r$ bis $y = 1$. Dabei bedeutet k eine passend, insbesondere hinreichend groß gewählte positive Konstante. Der heikelste Punkt der Rech-

nung, der das Integral an der horizontalen, ins Unendliche rückenden Strecke entlang betrifft, erledigt sich durch eine Überlegung von Backlund[1]).

3. Es seien die Nullstellen von $F(z)$, mehrfache in richtiger Vielfachheit geschrieben, nach niemals abnehmenden absoluten Beträgen geordnet $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Ich setze voraus, daß $|a_1| > 0$, d. h. daß der Punkt $z = 0$ keine Nullstelle ist. Dann ist

$$F(z) = F(0)\, e^{a z} \left(1 - \frac{z}{a_1}\right)\left(1 - \frac{z}{a_2}\right)\left(1 - \frac{z}{a_3}\right) \cdots .$$

Die komplexe Zahl a wird in der Gaußschen Zahlenebene durch einen inneren Punkt des Polygons $\mathfrak{P}$ dargestellt, der als sein Krümmungsschwerpunkt bezeichnet wird. Unter „Krümmungsschwerpunkt" eines konvexen Polygons versteht man den Schwerpunkt einer Gesamtmasse 2π, die auf die einzelnen Ecken des Polygons so verteilt ist, daß eine Ecke mit dem Innenwinkel α die Masse $\pi - \alpha$ erhält[2]). Zum besseren Verständnis des ausgesprochenen Satzes sei noch erwähnt, daß das Produkt $\left(1 - \frac{z}{a_1}\right)\left(1 - \frac{z}{a_2}\right)\left(1 - \frac{z}{a_3}\right) \ldots$ nicht absolut konvergent ist.

Zum Beweis nimmt man an, daß z von sämtlichen Nullstellen von $F(z)$ verschieden ist, und man betrachtet das

---

[1]) Backlund, Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann (Comptes Rendus, Paris, Bd. 158 (1914) S. 1979–1981).

[2]) Vgl. Steiner, Gesammelte Werke Bd. 2, S. 97 ff., insbesondere S. 129. Die Steinerschen Eigenschaften des Krümmungsschwerpunktes ergeben sich leicht aus passenden Integralformeln. Ist $p = p(\varphi)$ die Stützfunktion (d. h. der Abstand von dem Nullpunkt der Stützgeraden, als Funktion des Polarwinkels φ ihrer Normalen) so sind die beiden Koordinaten des „Krümmungsschwerpunktes"

$$x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (p\cos\varphi - p'\sin\varphi)\, d\varphi, \quad y = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (p\sin\varphi + p'\cos\varphi)\, d\varphi.$$

Integral $\frac{1}{2\pi i}\int \frac{F'(u)}{F(u)} \lg\left(1-\frac{z}{u}\right) du$, erstreckt über zwei geschlossene Kurven; die sind: 1) ein Kreis, der durch keine Nullstelle von $F(u)$ hindurchgeht, mit dem Mittelpunkte $u=0$ und dem Radius $\varrho > |z|$, im positiven Sinne durchlaufen; 2) eine geschlossene doppelpunktlose Kurve, ganz im Innern des genannten Kreises enthalten, die $u=0$ und $u=z$ einschließt, sämtliche Nullstellen von $F(u)$ ausschließt und im negativen Sinne durchlaufen wird. Es ist zu bemerken, daß im Zwischenraum der beiden beschriebenen Kurven der Integrand eindeutig und bis auf Pole erster Ordnung regulär ist. Es ist zweckmäßig ϱ nicht stetig, sondern durch gewisse ausgewählte Werte hindurch ins Unendliche wachsen lassen, die eine günstige Abschätzung von $\frac{F'(z)}{F(z)}$ gestalten. Es kann etwa der folgende elementare und verhältnismäßig einfache Hilfssatz benutzt werden:

Es sei $0 < c_1 \leq c_2 \leq c_3 < \ldots$, $\lim_{n=\infty} c_n = \infty$. Die Anzahl derjenigen Zahlen c_ν, die $\leq r$ sind, sei mit $N(r)$ bezeichnet. Es sei vorausgesetzt, daß

$$\lim_{r=\infty} \frac{N(r)-r}{\sqrt{r}} = 0.$$

Dann kann man, sobald r eine gewisse Grenze übersteigt, in dem Intervall von $r-\sqrt{r}$ bis $r+\sqrt{r}$ eine Zahl ϱ finden (ϱ ist als Funktion von r aufzufassen), derart daß

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{1}{\sqrt{\varrho}\lg\varrho} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varrho}{|\varrho - c_\nu|} < 1.$$

4. Von den Beziehungen dieser Sätze zu geometrischen Fragen sei nur einiges erwähnt. Neben $F(z)$ und $\mathfrak{A}$ betrachte man die Funktion

$$G(z) = Q_1(z)\, e^{b_1 z} + Q_2(z)\, e^{b_2 z} + \cdots + Q_n(z)\, e^{b_n z}$$

($Q_1(z)$, $Q_2(z)$, $\ldots$ $Q_n(z)$ Polynome) und das kleinste konvexe Polygon $\mathfrak{B}$, das die Punkte b_1, b_2, $\ldots$ b_n umfaßt. Es sei

$0 < t < 1$. Zu der Funktion $F(tz)\ G((1-t)z)$ gehört das kleinste konvexe Polygon, das die Punkte $a_\mu t + b_\nu (1-t)$ umfaßt ($\mu = 1, 2, 3, \ldots m$; $\nu = 1, 2, 3, \ldots n$). Dieses Polygon, das ich mit $\{t\mathfrak{A} + (1-t)\mathfrak{B}\}$ bezeichnen will, durchläuft die auf die Polygone $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ aufgebaute „lineare Schar" konvexer Polygone[1]). Nehmen wir Einfachheit halber an, daß keine Seite von $\mathfrak{A}$ einer Seite von $\mathfrak{B}$ parallel ist. Aus dem Satze unter 1 folgt, daß die einzelnen Seiten des Polygons $\{t\mathfrak{A} + (1-t)\mathfrak{B}\}$ entweder einer Seite von $\mathfrak{A}$ oder einer Seite von $\mathfrak{B}$ parallel sind. Aus dem Satze unter 2 folgt, daß $\{t\mathfrak{A} + (1-t)\mathfrak{B}\}$ genau $m+n$-Seiten hat; m verschiedene Seiten sind den m verschiedenen Seiten von $\mathfrak{A}$ parallel und verhalten sich der Länge nach zu ihnen, wie t zu 1, n Seiten sind den Seiten von $\mathfrak{B}$ parallel und verhalten sich zu ihnen, wie $1-t$ zu 1.

Aus dem Satze unter 3 ist ähnlicherweise eine einfache Konstruktion des Krümmungsschwerpunktes von $\{t\mathfrak{A} + (1-t)\mathfrak{B}\}$ aus den Krümmungsschwerpunkten von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ abzulesen. Die fragliche Konstruktion ist übrigens auch den in der Anmerkung [2]) S. 288 gegebenen Formeln zu entnehmen.

---

[1]) Vgl. z. B. W. Blaschke, Kreis und Kugel, (Leipzig, 1916), S. 92 ff.

Über eine Verallgemeinerung des Stolzschen Irrationalitätssatzes II.

Von **Oskar Perron.**

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 5. Juni 1920.

§ 1. Theoreme.

In einer gleichbetitelten Arbeit im Jahrgang 1908 (S. 181) dieser Sitzungsberichte habe ich den folgenden Satz bewiesen:

Satz 1. Wenn die Koeffizienten der Differenzengleichung

$$D_{\nu+n} + b_1^{(\nu)} D_{\nu+n-1} + \cdots + b_n^{(\nu)} D_\nu = 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

reell sind und den Ungleichungen

$$1 \geq b_1^{(\nu)} \geq b_2^{(\nu)} \geq \cdots \geq b_n^{(\nu)} > 0$$

genügen, so bleibt D_ν, wie auch die Anfangswerte $D_0, D_1, \ldots, D_{n-1}$ gewählt sein mögen, absolut unter einer von ν unabhängigen Schranke.

Während mein damaliger Beweis recht umständlich ist, bin ich heute in der Lage, den Satz in wenigen Zeilen zu beweisen. Das neue Beweisverfahren führt aber auch zu dem folgenden Satz, dessen Beweis ich a. a. O. nur für $n \leq 4$ erbringen konnte.

Satz 2. Wenn eine Folge von **ganzen rationalen Zahlen** $D_0, D_1, D_2, \ldots$ einer Rekursionsformel der Gestalt

$$D_{\nu+n} + b_1^{(\nu)} D_{\nu+n-1} + \cdots + b_n^{(\nu)} D_\nu = 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

genügt, wobei

$$1 > b_1^{(\nu)} > b_2^{(\nu)} > \cdots > b_n^{(\nu)} > 0$$

sein soll, so ist notwendig $D_\nu = 0$ für alle ν.

Treten zu den Voraussetzungen von Satz 1 noch weitere hinzu, so wird man über das Verhalten der D_ν noch genauere Aussagen machen können. Insbesondere werde ich beweisen:

Satz 3. Wenn unter den Voraussetzungen von Satz 1 unter den reellen nicht negativen Zahlen

$$1 - b_1^{(\nu)},\ b_1^{(\nu)} - b_2^{(\nu)},\ \cdots,\ b_{n-1}^{(\nu)} - b_n^{(\nu)},\ b_n^{(\nu)}$$

keine verschwindenden und keine beliebig kleinen sind, so ist $\lim_{\nu=\infty} D_\nu = 0$.

Dieser Satz kann als eine Verallgemeinerung des Kakeyaschen Satzes angesehen werden, wonach die Wurzeln der Gleichung

$$x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n = 0,$$

wenn

$$1 > b_1 > b_2 > \cdots > b_n > 0$$

ist, alle absolut kleiner als 1 sind.[1]) In der Tat, ist ϱ eine Wurzel dieser Gleichung, so braucht man in Satz 3 nur $b_i^{(\nu)} = b_i$ und $D_\nu = \varrho^\nu$ zu setzen, um den Kakeyaschen Satz zu erhalten.

Endlich beweise ich noch:

Satz 4. Wenn die Elemente der Jacobi-Kette n^{ter} Ordnung

$$\begin{bmatrix} a_0^{(0)}, & a_0^{(1)}, & a_0^{(2)}, & \cdots \\ - & - & - & - \\ a_n^{(0)}, & a_n^{(1)}, & a_n^{(2)}, & \cdots \end{bmatrix}$$

ganze rationale Zahlen sind ($a_0^{(\nu)} \neq 0$), welche von einem gewissen Index ν an den Ungleichungen

$$0 < a_0^{(\nu)} \leq a_1^{(\nu)} < \cdots \leq a_n^{(\nu)}$$

---

[1]) S. Kakeya, On the limits of the roots of an algebraic equation with positive coefficients. The Tôhôku mathematical journal, vol. 2 (1912).

genügen, so konvergiert die Kette, und ihr Wertesystem $\alpha_1^{(0)}, \ldots, \alpha_n^{(0)}$ genügt keiner Relation der Form

$$P_0 \alpha_0^{(0)} + P_1 \alpha_1^{(0)} + \cdots + P_n \alpha_n^{(0)} = 0$$

mit rationalen, nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten P_i.

Auch diesen Satz, der eine Verallgemeinerung des für $n = 1$ entstehenden Stern-Stolzschen Irrationalitätssatzes ist, habe ich früher nur für $n \leqq 4$ beweisen können. Ich habe aber damals allgemein gezeigt, daß der Satz eine Folge von Satz 2 ist; nachdem jetzt Satz 2 für beliebiges n bewiesen wird, ist damit auch der Beweis von Satz 4 erbracht.

§ 2. Beweise.

Beweis von Satz 1. Setzt man

$$D_0 + D_1 + \cdots + D_\nu = \Delta_\nu, \tag{1}$$

so ist für $\nu \geqq 1$

$$D_\nu = \Delta_\nu - \Delta_{\nu-1}, \tag{2}$$

und die in Satz 1 auftretende Differenzengleichung geht für $\nu \geqq 1$ über in

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta_{\nu+n} = (1 - b_1^{(\nu)})\, \Delta_{\nu+n-1} + (b_1^{(\nu)} - b_2^{(\nu)})\, \Delta_{\nu+n-2} + \cdots \\ + (b_{n-1}^{(\nu)} - b_n^{(\nu)})\, \Delta_\nu + (b_n^{(\nu)})\, \Delta_{\nu-1}. \end{aligned} \right. \tag{3}$$

Hieraus folgt, da die Klammergrößen nach Voraussetzung reell und nicht negativ sind:

$$|\Delta_{\nu+n}| \leqq (1 - b_1^{(\nu)})\, |\Delta_{\nu+n-1}| + \cdots + (b_{n-1}^{(\nu)} - b_n^{(\nu)})\, |\Delta_\nu| + b_n^{(\nu)} |\Delta_{\nu-1}|.$$

Setzt man also

$$\operatorname{Max}(|\Delta_{\nu+n-1}|, |\Delta_{\nu+n-2}|, \cdots, |\Delta_\nu|, |\Delta_{\nu-1}|) = M_{\nu-1},$$

so ist $|\Delta_{\nu+n}| \leqq M_{\nu-1}$, und folglich auch $M_\nu \leqq M_{\nu-1}$. Daher wird ganz allgemein $M_\nu \leqq M_1$, und folglich auch $|\Delta_\nu| \leqq M_1$ sein. Wegen (2) ist dann $|D_\nu| \leqq 2 M_1$, und damit ist Satz 1 bewiesen.

Beweis von Satz 2. Nach Voraussetzung sind jetzt die Zahlen

$$1 - b_1^{(\nu)},\ b_1^{(\nu)} - b_2^{(\nu)},\ \ldots,\ b_{n-1}^{(\nu)} - b_n^{(\nu)},\ b_n^{(\nu)}$$

positiv. Die D_ν und folglich auch die Δ_ν sind ganze rationale Zahlen. Nach dem soeben Bewiesenen ist

$$\limsup_{\nu=\infty} \Delta_\nu = S$$

endlich und selbstverständlich eine ganze rationale Zahl. Für genügend große ν ist daher

$$\Delta_\nu \leqq S. \tag{4}$$

Hier kann aber niemals das Kleinerzeichen gelten. Denn wäre einmal von den $n+1$ aufeinander folgenden Zahlen

$$\Delta_{\nu-1},\ \Delta_\nu,\ \ldots,\ \Delta_{\nu+n-1}$$

mindestens eine kleiner als S, so wäre nach (3) auch $\Delta_{\nu+n} < S$, und überhaupt $\Delta_\lambda < S$ für $\lambda > \nu + n$. Da aber Δ_λ und S ganze Zahlen sind, so wäre $\Delta_\lambda \leqq S - 1$ für alle hinreichend großen λ, was der Definition von S widerspricht. Daher muß in (4) stets das Gleichheitszeichen gelten; für alle hinreichend großen ν ist also $\Delta_\nu = S$, und folglich $D_\nu = \Delta_\nu - \Delta_{\nu-1} = 0$.

Aber dann muß die Gleichung $D_\nu = 0$ sogar für alle ν gelten. Denn wäre sie etwa nur für $\nu > N$ richtig, und für $\nu = N$ falsch, so würde aus der gegebenen Differenzengleichung für $\nu = N$ doch folgen: $D_N = 0$, entgegen der Annahme.

Beweis von Satz 3. Jetzt wird vorausgesetzt, daß die Zahlen

$$1 - b_1^{(\nu)},\ b_1^{(\nu)} - b_2^{(\nu)},\ \ldots,\ b_{n-1}^{(\nu)} - b_n^{(\nu)},\ b_n^{(\nu)}$$

oberhalb einer positiven von ν unabhängigen Schranke g liegen. Offenbar genügt es, den Satz 3 für reelle D_ν zu beweisen. Dann sind auch die Δ_ν reell, und nach dem Bewiesenen sind

$$\limsup_{\nu=\infty} \Delta_\nu = S, \quad \liminf_{\nu=\infty} \Delta_\nu = s \tag{5}$$

endliche Zahlen; wir wollen zeigen, daß sie einander gleich sind.

Für jedes ν ist von den $n+1$ aufeinander folgenden Zahlen

$$\Delta_{\nu-1},\ \Delta_{\nu},\ \ldots,\ \Delta_{\nu+n-1}$$

mindestens eine $\leq s$. Denn wären sie für einen gewissen ν-Wert alle $> s$ und folglich $> s+\delta$, wo δ eine positive Zahl ist, so wäre nach (3) auch $\Delta_{\nu+n} > s+\delta$, und überhaupt $\Delta_\lambda > s+\delta$ für $\lambda \geq \nu+n$, was aber der zweiten Gleichung (5) widerspricht.

Bedeutet nun ε eine beliebig kleine positive Zahl, so sind für genügend große ν in Gleichung (3) die Δ der rechten Seite kleiner als $S+\varepsilon$, und mindestens eines ist sogar $\leq s$. Daher folgt aus (3), weil die Klammergrößen jetzt $\geq g$ sind:

$$\Delta_{\nu+n} \leq S+\varepsilon-g\,(S+\varepsilon-s).$$

Wenn nun $S > s$, so besagt diese Ungleichung, sofern nur ε klein genug gewählt wird:

$$\Delta_{\nu+n} < S-\eta,$$

wo η positiv ist, und überhaupt ist dann $\Delta_\lambda < S-\eta$ für $\lambda \geq \nu+n$, was aber der ersten Gleichung (5) widerspricht. Die Annahme $S > s$ ist also falsch, und folglich muß $S = s$ sein. Da somit der Grenzwert

$$\lim_{\nu=\infty} \Delta_\nu = S = s$$

existiert, ist

$$\lim_{\nu=\infty} D_\nu = \lim_{\nu=\infty} (\Delta_\nu - \Delta_{\nu-1}) = 0. \quad \text{W. z. b. w.}$$

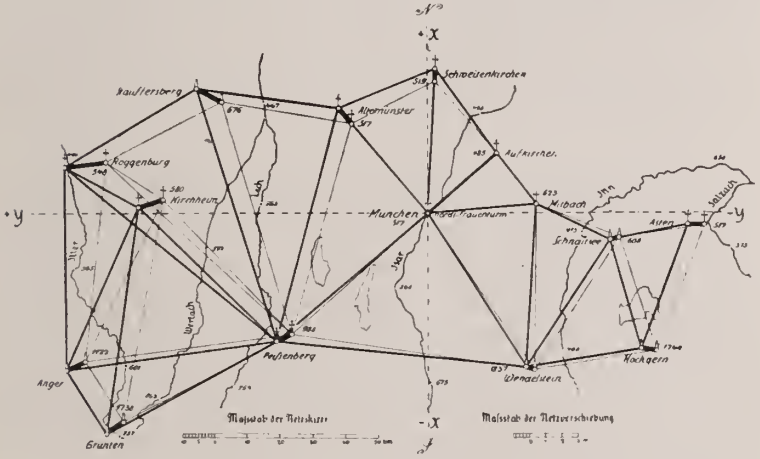
Beweis von Satz 4. Ein solcher ist überflüssig, da dieser Satz eine Folge von Satz 2 ist, wie bereits in § 1 erwähnt.

Westwanderung von Hauptdreieckspunkten infolge neuzeitlicher tektonischer Bewegungen im bayerischen Alpenvorland.

Von **M. Schmidt.**

Vorgetragen in der Sitzung am 5. Juni 1920.

Netzverschiebung der südbayerischen Dreieckskette.



In einem am 21. Juni 1919 in der Sitzung der mathem.-physikal. Klasse der Akademie gehaltenen Vortrag über die geologische Bedeutung der neueren Feinmessungen bespricht Herr E. Kayser die in letzterer Zeit in Nord- und Mitteldeutschland gemachten Wahrnehmungen über Höhenänderungen von Bodenpunkten insbesondere im Bodenseegebiet und im bayerischen Alpenvorland und bringt dieselben in Zusammenhang mit den bereits seit der älteren Tertiärzeit inmitten der schwei-

zerischen und süddeutschen Molasse- oder Miozänmulde eingetretenen starken Senkungen, die offenbar in der Jetztzeit noch nachklingen.

Die Senkungen im Bodenseebecken hat schon Chr. Regelmann 1907 auf einen von den Alpen her wirkenden Tangentialdruck zurückführen wollen, der mit einem langsamen Vordringen der Alpen nach Norden in Zusammenhang steht, durch das die große zwischen der böhmischen Urgebirgsmasse, dem Schwarzwald und dem Vogesenkern sowie der Nordkette der Alpen eingeschlossene Miozänmulde wie zwischen den Backen eines Schraubstockes zusammengepreßt wird.

„Dadurch erklärt sich nicht allein das durch die Höhenänderung der Nivellementspunkte von M. Schmidt nachgewiesene Einsinken der Muldenbodenfläche in einfacher Weise, sondern auch die im Laufe des vergangenen Jahrhunderts eingetretene Lageänderung von Hauptdreieckspunkten, für die sich eine deutlich ausgesprochene Bewegung in westlicher Richtung nachweisen läßt."

Die Ablenkung nach Westen der durch das Vorrücken der Alpen ausgelösten Druckwirkung erscheint durch den großen Widerstand bedingt, welchen die nach Norden vorgelagerten, in der Tiefe fest verankerten älteren Gebirgsmassen der Bewegung in dieser Richtung entgegensetzen, während die gegen Westen gelegenen jüngeren Miozän- und Quartärschichten der Oberfläche, deren Zusammenhang zudem noch durch zahlreiche, tief eingeschnittene und durch lose Geröllmassen ausgefüllte Flußtäler unterbrochen ist, der Bewegung in westlicher Richtung einen geringeren Widerstand entgegensetzen.

Eine Anzahl solcher für den gedachten Zweck geeigneter Dreieckspunkte konnte der in der ersten Hälfte des vergangenen Jahrhunderts ausgeführten bayerischen Landestriangulierung entnommen werden, da diese Punkte neuerdings bei der Durchführung der auf dem Parallelbogen zwischen 47 und 49° Breite zwischen Brest und Astrachan vorgenommenen Längengradmessung wiederholt in ihrer Lage mit größter Sorgfalt bestimmt worden waren.

Die benützten Punkte bilden eine einfach zusammenhängende Kette großer Dreiecke von guter Form, welche die auf dem gleichen Parallelbogen gemessenen württembergischen und österreichischen Dreiecke miteinander verbindet und mit diesen die Seiten Aenger-Roggenburg im Westen und Asten-Hochgern im Osten gemeinsam hat. Die dieser südbayerischen Dreieckskette angehörenden Winkel sind nebst den aus der oberbayerischen Grundlinie München-Aufkirchen berechneten Seitenlogarithmen in den Sitzungsberichten vom Jahre 1906 ausführlich mitgeteilt und ergaben einen aus den auftretenden Dreieckswidersprüchen nach der internationalen Formel berechneten Fehler von $\pm 0\overset{''}{.}36$.

Die Winkelzusammenstellung läßt in der Spalte „Beobachtungsnachweis“ auch die Zeit der Ausführung der Messungen in den Jahren 1903 bis 1905, beziehungsweise die Übernahme der Winkelwerte aus der in der ersten Hälfte des vergangenen Jahrhunderts durchgeführten bayerischen Landestriangulierung erkennen.

Mit Rücksicht auf die sehr beträchtlichen Kosten der Beobachtungen wurde die Messung neuer Winkel tunlichst eingeschränkt. Insbesondere sind auf den Punkten: Stauffersberg, Altomünster, Schweitenkirchen und Aufkirchen, welche die Herstellung kostspieliger Beobachtungseinrichtungen bzw. den Bau hoher Pfeilergerüste erfordert hätten, neue Winkelmessungen ganz unterblieben, was unbedenklich geschehen konnte, da die Benützung der vorhandenen älteren Beobachtungen ohnehin zu geringen Dreieckswidersprüchen führte.

Die Ergebnisse der Berechnung der sphärischen Koordinaten und der Seitenanschlüsse der südbayerischen Dreieckskette sind in der in den Sitzungsberichten der Akademie vom Jahre 1910 veröffentlichten 11. Abhandlung niedergelegt und zeigen für den württembergischen Anschluß auf der Seite Aenger-Roggenburg eine Anschlußdifferenz von 2.6 mm/km $= 1 : 385000$ und für den österreichischen Anschluß für die Seiten Wendelstein-Hochgern und Hochgern-Asten im Mittel einen solchen von nur 1.5 mm/km $= 1 : 650000$.

Eine im Jahre 1920 auf Grund einer neuen Koordinatenausgleichung ausgeführte Anschlußberechnung ergab für die gleichen Seiten Anschlußdifferenzen von 3.85 mm/km = 1:259000 und von 1.8 mm/km oder 1:550000, wobei für den österreichischen Anschluß die in dem 1915 erschienenen XXIII. Band der astronom. geodät. Arbeiten des Militärgeographischen Institutes in Wien als Resultate der Netzausgleichung angeführten Werte der Logarithmen der Anschlußseiten die Vergleichswerte bilden. Die Richtigkeit der Berechnung der Seitenlängen der südbayerischen Dreieckskette und ihre Zurückführung auf internationales Maß ist somit genügend verbürgt. Die gute Übereinstimmung zwischen den mit den Winkeln von den Jahren 1903/04 aus der 1801 gemessenen oberbayerischen Grundlinie ohne Anschlußzwang berechneten Längen der Seiten Aenger-Roggenburg und Asten-Hochgern und den aus den wesentlich später gemessenen Grundlinien von Josephstadt (1862) und Oberhergheim (1877) hergeleiteten Werten dieser beiden Seiten läßt die bei den gegenwärtigen Untersuchungen gemachte Voraussetzung der Unveränderlichkeit des Abstandes der beiden Basisendpunkte bei München und Aufkirchen innerhalb der Grenzen der unvermeidlichen Messungs- und Übertragungsfehler als völlig berechtigt erscheinen.

Die Ausgleichung der Beobachtungsfehler in den Winkeln der südbayerischen Dreieckskette ist zunächst unter der Annahme gleicher Winkelgewichte nach „Bedingungsgleichungen" erfolgt und hat den mittleren Winkelfehler zu $\pm 0''.82$ ergeben.

Die ausgeglichenen Winkel und die mittelst derselben unter Beibehaltung der bei der Berechnung der Landesvermessung verwendeten Länge der altbayerischen Grundlinie München-Aufkirchen erhaltenen Werte der Seitenlogarithmen sind in der Abhandlung 11 der Sitzungsberichte vom Jahre 1910 in Tabelle I zusammengestellt und haben auch bei der Koordinatenberechnung der Netzpunkte Verwendung gefunden; dabei ist von den gleichen Grundlagen ausgegangen worden, wie bei der Landesvermessung, um die Möglichkeit einer unmittelbaren Vergleichung der älteren und neuen Koordinatenwerte zu erhalten.

Die der Landesvermessung entnommenen Koordinaten der Netzpunkte ergeben mit jenen der Neuberechnung die in Tabelle III des genannten Berichtes aufgeführten Unterschiede, die durch systematische Fehler stark beeinflußt sind.

Eine Ausscheidung dieser Fehler läßt sich vornehmen, wenn man die beiden Punktsysteme der Landesvermessung und der neuen gemessenen Dreieckskette dadurch in eine möglichst gut übereinstimmende Lage zu bringen sucht, daß man sie übereinander legt und nach dem von Helmert in seiner Längengradmessung I, 1893, S. 47 angewandten Verfahren derart gegeneinander verschiebt, daß die Quadratsumme der Abstände gleichnamiger Punkte ein Minimum wird.

Die dann noch übrig bleibenden, aus der gleichen Tabelle III ersichtlichen Differenzen kommen besonders an den beiden Enden der Dreieckskette zur Geltung, und ergeben für den Koordinatenursprung München n. Fr.-Turm den auffallenden Betrag von $v_y = + 34$ cm, der in nahezu gleicher Größe bei allen übrigen Netzpunkten auftritt. Man könnte hieraus auf eine in der Zeit zwischen der Ausführung der Landesvermessung und der Messung der südbayerischen Dreieckskette eingetretene Lageänderung des Koordinatenursprungspunktes schließen.

Die zur Feststellung einer derartigen Lageänderung ausgeführten Untersuchungen sind ebenfalls in der Abhandlung vom Jahre 1910 ausführlich mitgeteilt und haben zu dem Ergebnis geführt, daß sich die Lage der Turmspitze weder gegen die weit entfernten Hauptnetzpunkte: Altomünster, Mitbach, Wendelstein und Peißenberg, noch gegen die in nächster Nähe gelegenen Türme der Stadt in bemerkenswerter Weise geändert hat.

Die ausgeführten Messungen ergaben als derzeitig wahrscheinlichste Koordinatenwerte der bei der Landesvermessung als Nullpunkt angenommenen Helmsäulenmitte $x_0 = + 0.013$ m und $y_0 = + 0.003$ m, das sind Abweichungen, die sich von Null nur sehr wenig unterscheiden und die Größe der wahrscheinlichen Fehlerwerte nicht erreichen.

Von einer Mitteilung der Ergebnisse der Winkelmessungen und Berechnungen, die zur Zentrierung der auf den 3 Fenster-

pfeilern der Turmstube, sowie des auf der Oberfläche der Turmhaube neben der Aussteigöffnung gewählten Heliotropenstandortes auf die Achse der Helmstange auszuführen waren, muß abgesehen werden; sie befinden sich bei den Messungsakten der bayerischen Erdmessungskommission des Hauptdreieckspunktes „Nordturm der Frauenkirche".

Auch die Beschaffenheit des Untergrundes, auf welchem die Frauenkirche steht, läßt eine Lageänderung derselben unwahrscheinlich erscheinen. Oberbergdirektor v. Gümbel macht hierüber in einem Aufsatz über den Boden von München folgende Angaben:

„Die unter dem in der diluvialen Zeit vom Hochgebirg herabgeschwemmten Geröllmassen liegenden, wasserundurchlässigen tertiären Schichten des Grundgebirges bestehen aus graugrünen, sandig lettigen, als Flinz bezeichneten Ablagerungen, deren Mächtigkeit auf viele hundert Meter geschätzt wird." Dieses mächtige Grundgebirge bildet, wie man mit Sicherheit annehmen darf, selbst für die gewaltigen Baumassen der Frauenkirche ein Fundament von ausreichender Tragfähigkeit.

Durch die städtischen Kanalisationsarbeiten auf dem Frauenplatz ist die Oberfläche dieser Flinzschichten, auf welche die Fundamente der Frauenkirche herabreichen, in einer Tiefe von nur 4 bis 5 m unter der Bodenoberfläche aufgeschlossen worden.

Ein im Stadtbauamt München im Jahre 1907 in 1 : 10000 Verjüngung hergestellter Übersichtsplan des Stadtbezirkes von München, in welchem die Oberflächengestaltung des Bodens, sowie jene des tertiären Untergrundes und des Grundwassers durch verschiedenfarbige Schichtenlinien dargestellt sind, läßt ferner entnehmen, daß die Frauenkirche auf dem Scheitel einer Aufwölbung des gegen Südwesten mit 3 bis 5 ‰ ansteigenden Grundgebirges gelegen ist, das durch seine Festigkeit auch einer seitlichen Verschiebung der mächtigen Baumassen der Kirche den größten Widerstand entgegensetzen muß. Eine so bedeutende Verschiebung der Frauenkirche, wie sie sich aus der oben erwähnten Koordinatenberechnung ergeben hat, kann daher nicht wohl eingetreten sein, es muß vielmehr eine bessere

Erklärung für die rechnerisch festgestellten Koordinatenänderungen gesucht werden.

In einer im Jahre 1915 in den Sitzungsberichten erschienenen Abhandlung über Senkungserscheinungen an der Frauenkirche ist von mir bereits darauf hingewiesen worden, daß bei der Fehlerausgleichung großer trigonometrischer Netze, die nicht einheitlich als ganzes, sondern in einzelnen, durch Zwangsbedingungen in Zusammenhang gebrachten Gruppen berechnet werden, sogenannte Netzverschiebungsfehler auftreten, die auch im vorliegenden Falle in Betracht zu ziehen sind, da das Hauptnetz der bayerischen Landestriangulierung für die Fehlerausgleichung nach bedingten Beobachtungen in 29 einzelne Gruppen zerlegt worden ist, von welchen 10 auf den südlich der Donau gelegenen Netzteil treffen.

Der Nachweis derartiger Fehler erscheint möglich, wenn man den ganzen in Betracht kommenden Netzteil unter Benützung derselben Beobachtungen wiederholt nach einem zweiten, vom ersten unabhängigen Berechnungsverfahren, wie es sich in der sogenannten Koordinatenausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen darbietet, ausgleicht.

Über die Ergebnisse dieses durch den Assistenten am geodätischen Institut Dr. Ing. Ad. Schlötzer auf meine Veranlassung ausgeführten Ausgleichungsverfahrens ist von mir in den Sitzungsberichten der Akademie vom Januar dieses Jahres unter dem Titel „Neuberechnung des südlichen Netzteiles der bayerischen Landestriangulierung zwischen der Donau und der Nordkette der Alpen“ eine Mitteilung veröffentlicht worden.

Bei dieser Berechnung wurden die Koordinaten der Landesvermessung als Näherungswerte eingeführt und unter Verwendung der im Landesvermessungswerk veröffentlichten, aus der ursprünglichen Stationsausgleichung hervorgegangenen Winkeln die wahrscheinlichsten Werte jener Koordinatenverbesserungen ermittelt, welche die kleinste Quadratsumme der Richtungsverbesserungen geben. Es waren dabei für 40 Hauptnetzpunkte aus 274 Fehlergleichungen 80 Koordinatenverbesserungen durch Auflösung einer gleichen Anzahl von Normalgleichungen

zu berechnen. Dabei hatten sich 120 Bedingungsgleichungen mit eben so vielen Unbekannten aufstellen lassen, von welchen indessen 40 zur Berechnung der Orientierungsverbesserungen der Netzlinien dienende Gleichungen abgetrennt und für sich behandelt werden konnten, während die übrigen 80 Gleichungen zur Bestimmung der 80 Koordinatenverbesserungen dx und dy dienten, deren Werte in Tabelle I der erwähnten Mitteilung enthalten sind.

Die Neuausgleichung des Netzteiles führte zu mittleren Richtungs- und Winkelfehlern von $\pm$ 1.″28 bzw. $\pm$ 1.″80 gegenüber den analogen Werten der Landesvermessung $\pm$ 1.″52 und $\pm$ 2.″14, während nach der internationalen Formel aus 337 Dreiecken der Gesamttriangulierung der mittlere Winkelfehler zu $\pm$ 1.″77 berechnet worden ist.

Die Auflösung der Gewichtsgleichungen unter Einführung von Gewichtswerten, die proportional zu den Anschnittszahlen gewählt wurden, ergab für 16 Punkte schließlich die mittleren Koordinatenfehler $m_x = \pm$ 0.29 m, $my = \pm$ 0.39 m.

Diese beiden Fehlerwerte zeigen einen auch in der Abhandlung vom Jahre 1910 in den Koordinatenfehlern auftretenden auffallenden Größenunterschied, der, wie hier schon erwähnt werden soll, seine natürliche Erklärung in einer im Laufe der Zeit eingetretenen Ordinatenänderung der Dreieckspunkte findet, die dadurch entstanden ist, daß die der Berechnung zugrunde liegenden Winkelbeobachtungen nicht in unmittelbarer Aufeinanderfolge ausgeführt, sondern zeitlich auf die ganze erste Hälfte des vergangenen Jahrhunderts verteilt sind, so daß die in der Lage der Punkte mit der Zeit eingetretenen Änderungen in der Zunahme der Größe der Punktfehler ihren analytischen Ausdruck finden.

Ordinatenänderungen der angedeuteten Art in noch größeren Beträgen zeigen sich bei der Vergleichung der Koordinaten der südbayerischen Dreieckskette mit jenen der identischen Punkte der Landesvermessung, die aus Winkelmessungen berechnet sind, zwischen deren Ausführung teilweise ein Zeitraum von mehr als einem halben Jahrhundert verflossen war.

Um bei dieser Vergleichung die Wirkung der mit dem Berechnungsverfahren zusammenhängenden systematischen Fehler tunlichst auszuschalten sind die verglichenen Koordinaten in beiden Fällen durch denselben Rechner nach dem gleichen Ausgleichungsverfahren ermittelt worden.

Als Ausgangswerte für die Berechnung dienten wieder die im amtlichen Werke über die bayerische Landesvermessung angegebene Länge und Orientierung der oberbayerischen Grundlinie München-Aufkirchen und die in den Sitzungsberichten des Jahres 1906 für die südbayerische Dreieckskette zusammengestellten Winkelbeobachtungen, bei welchen jedoch die alten auf den Stationen: Aufkirchen, Schweitenkirchen, Altomünster und Stauffersberg beobachteten und ausgeglichenen Winkel der Landesvermessung unverändert übernommen werden mußten, da auf diesen Punkten im Jahre 1903 bis 1905 neue Winkelmessungen nicht zur Ausführung gekommen waren.

Die Ergebnisse der beiden neuen Koordinatenberechnungen für die Punkte der Dreieckskette sind in der folgenden Tabelle aufgeführt, geordnet nach der Ordinatengröße in einer von Ost nach West fortlaufenden Reihenfolge, die, wie ein Blick auf die letzte Spalte der Tabelle lehrt, auch der Zunahme der Unterschiede der Ordinatenwerte in den beiden Punktsystemen entspricht.

Als letzter Punkt der nachstehenden Tabelle wurde ein in der Nähe der Bruchlinie von Laufen, am Fuß des Gebirges unweit von Traunstein bei der Ortschaft Kammer liegender Punkt aufgeführt, der im Jahre 1886 vom Observator der bayerischen Erdmessungskommission Dr. K. Oertel durch astronomische Messungen sowie durch Rückwärtseinschneiden auf fünf Hauptdreiecksnetzpunkte der Landesvermessung auch geodätisch festgelegt worden ist.

Seine in der die Überschrift „Landesvermessung“ tragenden Spalte der Tabelle angegebenen sphärischen Koordinaten besitzen die mittleren Fehler

$$m_x = \pm 0{,}19 \text{ m} \text{ und } m_y = \pm 0{,}07 \text{ m}.$$

Koordinatentabelle der Neuausgleichung der Landesvermessung und der südbayerischen Dreieckskette.

Nr.	Punkt	Landesvermessung		südb. Dreieckskette		$dx = x' - x$	$dy = y' - y$
		x	y	x'	y'		
1	Watzmann	− 63627.62	− 101661.56	− 63627.75	− 101661.04	− 0.13	+ 0.52
2	Asten T.	− 3814.76	− 85782 99	− 3814.73	− 85782.02	+ 0.03	+ 0.97
3	Hochgern	− 42666.00	− 70760.17	− 42665.88	− 70759.26	+ 0.12	+ 0.91
4	Schnaitsee T.	− 7194.28	− 59480.06	− 7194.34	− 59479.50	− 0 06	+ 0.56
5	Rettenstein	− 89313.41	− 54666.88	− 89312.37	− 54666.07	+ 1 04	+ 0.81
6	Mitbach T.	+ 2960.86	− 33970.62	+ 2960.85	− 33970.60	− 0.01	+ 0.02
7	Wendelstein	− 48295.00	− 32962.72	− 48294.85	− 32962 21	+ 0.15	+ 0.51
8	Aufkirchen T.	+ 18696.59	− 21506.37	+ 18696.58	− 21506.37	− 0.01	+ 0.00
9	Schweitenk. T.	+ 40804.24	− 2498.80	+ 40804.99	− 2498.80	+ 0.75	+ 0.00
10	München n.Fr.T.	0.00	0.00	0.00	0.00	+ 0.00	+ 0.00
11	Altomünster T.	+ 27772.04	+ 23394.61	+ 27772.99	+ 23395.38	+ 0.95	+ 0.77
12	Peissenberg T.	− 37407.14	+ 41985.15	− 37407.56	+ 41986.07	− 0.42	+ 0.92
13	Stauffersberg	+ 34377.90	+ 63435.76	+ 34378.74	+ 63437.31	+ 0.84	+ 1.55
14	Kirchheim T.	+ 4304.40	+ 81741.10	+ 4303.94	+ 81742.57	− 0.46	+ 1.47
15	Grünten	− 64146.51	+ 94295.66	− 64147.19	+ 94296.68	− 0.68	+ 1.02
16	Roggenburg s.T.	+ 15993.25	+ 99813.74	+ 15992.96	+ 99816.23	− 0.29	+ 2.49
17	Änger	− 45909.37	+ 106021.96	− 45909.93	+ 106023.15	− 0.56	+ 1.19
18	Kammer	− 23083.44	− 80874.60	− 23083.06	− 80873.44	+ 0.38	+ 1.16

Sie sind aus den durch die Neuausgleichung des Netzteiles südlich der Donau von den analytischen Netzverschiebungsfehlern befreiten Koordinatenwerten der Ausgangspunkte hergeleitet, welche mit den größtenteils in der ersten Hälfte des vergangenen Jahrhunderts ausgeführten Winkelmessungen berechnet sind. Die kleinen hiebei gefundenen Richtungsfehler von 0.″3 bis 0.″4 berechtigen zu dem Schluß, daß bemerkenswerte relative Veränderungen in der Lage der verwendeten Ausgangspunkte nicht eingetreten sind.

Im Jahre 1918, also nach Umlauf von 32 Jahren, sind die Koordinaten desselben Punktes durch den Assistenten des geodätischen Instituts Dipl.-Ing. R. Hesselbarth auf Grund neuer im gleichen Jahre auf dem alten Pfeilerfundament ausgeführten Winkelmessungen wiederholt durch Rückwärtsein-

schneiden auf vier benachbarte Hauptnetzpunkte, deren Lage durch die Neuausgleichung der südbayerischen Dreieckskette bekannt war, berechnet worden.

Diese in die Tabelle gleichfalls eingetragenen Koordinaten besitzen die mittleren Fehler

$$m_x' = \pm 0{,}26 \text{ m} \text{ und } m_y' = \pm 0{,}23 \text{ m}.$$

In die Netzskizze wurde der beiläufig in die Mitte der Seite Asten-Hochgern fallende Punkt Kammer nicht eingetragen, da er ursprünglich nicht zur Dreieckskette gehört hat, sondern erst nachträglich für andere Zwecke eingeschaltet worden ist.

Die Vergleichung der neuen Koordinaten des Punktes Kammer mit den daneben stehenden, aus der Landesvermessung durch Neuausgleichung ermittelten Werten liefert die Unterschiede

$$dx = + 0{,}38 \text{ m} \text{ und } dy = + 1{,}16 \text{ m},$$

die ebenfalls eine heute noch in Gang befindliche, nach Norden und Westen gerichtete Verschiebung des Punktes anzeigen. Der etwas größere Betrag der westlichen Verschiebung von Kammer im Vergleich mit jener der Punkte Asten und Hochgern, auf deren Verbindungslinie er liegt, kann durch die größere Nähe der Bruchlinie von Laufen eine natürliche Erklärung finden.

Auch kommt dabei noch in Betracht, daß bis zur Wiederholung der Winkelmessungen in Kammer eine um 15 Jahre längere Zeit verflossen ist, als bei den Punkten der südbayerischen Dreieckskette, sowie daß die Ausgangspunkte für die Berechnung der Lage von Kammer zum größeren Teil Gipfelpunkte der Nordkette der Alpen sind, welche an der Westwanderung in geringerem Maße beteiligt sind, als die Punkte des Alpenvorlandes.

Um einen besseren Überblick über das Größenverhältnis der in der Tabelle in Zahlen angegebenen Lageänderungen zu gewinnen, sind dieselben in der am Kopf des Textes stehenden Figur in stark vergrößertem Maßstab graphisch dargestellt, wobei die Ordinaten und Abszissenänderungen zu einer Resul-

tierenden zusammengefaßt wurden, deren Größe mit dem Abstand der Punkte von München sichtlich zunimmt.

Der Voraussetzung gemäß ist die Lageänderung für die Endpunkte der Grundlinie München und Aufkirchen Null. Auch für Mitbach ist sie verschwindend gering gefunden worden, während sie auf den übrigen Punkten teilweise beträchtliche Werte bis zu 2.5 m bei Roggenburg aufweist.

Die Punkte 1 und 5 der Tabelle, Watzmann und Rettenstein, auf welchen von bayerischer Seite zu Anfang des Jahrhunderts Winkelmessungen nicht ausgeführt wurden, sind in die Netzskizze ebensowenig wie Kammer aufgenommen worden; ihre Lageänderung ist mit 0.5 m bzw. 0.8 m in der Ordinatenrichtung aus der Tabelle zu ersehen. Bei den München kranzförmig umgebenden Punkten fällt die von diesem Punkte in radialer Richtung auslaufende Verschiebung auf, welche durch ein Abgleiten derselben von einer kuppelförmigen Aufwölbung des Grundgebirges bedingt sein könnte.

Bemerkenswert ist ferner, daß die Verschiebungen der Netzpunkte im Gebiet westlich von München, in welchem der Rand der Juraerhebung dem Fuße der Alpen sich nähert, offenbar zunehmen.

Daß die Ordinatenänderung des Punktes Roggenburg einen größeren Wert als jene der Nachbarpunkte zeigt, ist wahrscheinlich durch den Einfluß der Bodenrefraktion in Aenger auf die Zielrichtung nach Roggenburg bedingt.

Zur Zeit der Landesvermessung stand in Änger der Theodolit auf einem 20 m hohen Pfeilergerüst, während bei den späteren Winkelmessungen ein im Jahre 1885 erbauter Betonpfeiler von nur 2.2 m Höhe als Instrumentenstandort diente und die von da nach Roggenburg gerichtete Ziellinie den in dieser Richtung verlaufenden Rücken des Kreuzlesberges nahezu streifte; es kann sich daher hier ein schädlicher Einfluß der Bodennähe durch Verschwenkung der Zielrichtung um mehrere Sekunden geltend gemacht haben, wie sich auch durch die graphisch analytische Darstellung der in Änger beobachteten Strahlenrichtungen nachweisen läßt.

Über die theoretische Genauigkeit der Berechnungsergebnisse der südbayerischen Dreieckskette mag noch bemerkt werden, daß sich der mittlere Winkelfehler für das durchschnittliche Gewicht zu $\pm 0''.46$ ergab.

Die mittleren Koordinatenfehler wurden aus den Gewichtsgleichungen für 13 Netzpunkte berechnet und in guter Übereinstimmung mit den Ausgleichungsergebnissen des zur Vergleichung herangezogenen neuberechneten Netzteiles der Landestriangulierung südlich der Donau zu

$$m_x = \pm 0.28; \; m_y = \pm 0.35 \text{ m}$$

gefunden. Die Gewichtswerte sind dabei umgekehrt proportional zu den Quadraten der mittleren Richtungsfehler gesetzt worden. Der etwas größere Wert des Ordinatenfehlers m_y erklärt sich aus dem Umstand, daß bei der Netzberechnung die auf den oben genannten Stationen ausgeführten älteren Winkelmessungen Verwendung finden mußten, bei denen offenbar die zwischen ihrer Ausführung verflossene längere Zeit, innerhalb welcher sich ebenfalls eine Lageänderung der Punkte vollzogen haben muß, nicht ohne schädlichen Einfluß geblieben ist. Die Unsicherheit der Ordinatenbestimmung ist hiedurch offenbar vergrößert worden.

In der Netzskizze tritt ferner die nach Westen gerichtete Parallelverschiebung der Dreiecksseiten deutlich hervor.

Die mit der Verschiebung der oberen Bodenschichten in Zusammenhang stehende Schichtenzereißung bei Laufen, welche in Heft 2 der Ergänzungsmessungen zum bayerischen Präzisionsnivellement München 1919 eingehend behandelt und in der S. 20 dieser Veröffentlichung beigegebenen Kartenskizze dargestellt worden ist, konnte in die vorstehende Abbildung nicht aufgenommen werden, da sie weiter nach Südosten gelegen ist und über den Bereich der Darstellung hinausfällt.

Darüber, daß tatsächlich in der Zeit zwischen der Ausführung der bayerischen Landestriangulierung in der ersten Hälfte des vergangenen Jahrhunderts und der Zeit der Winkelbeobachtungen in der südbayerischen Dreieckskette eine Ver-

schiebung von identischen Punkten beider Messungen besonders in der Westrichtung, also eine Westwanderung dieser Punkte, von einer Größe, welche die mittlere Unsicherheit der Messung wesentlich überschreitet, eingetreten ist, kann nach den vorstehenden Ausführungen kein Zweifel mehr bestehen.

Wenn daher bisher die Aufgabe der Geodäsie in der Bestimmung der gegenseitigen Lage von Messungspunkten auf der als fest angenommenen Erdoberfläche bestanden hat, so sollte künftighin auch den Veränderungen in der Lage von Punkten der Erdkruste durch tektonische Kräfte eine größere Beachtung geschenkt werden.

In der Netzskizze am Kopfe der vorstehenden Abhandlung sind auch die das Voralpengebiet durchschneidenden nach Norden laufenden Gebirgsflüsse Salzach, Alz, Inn, Isar, Lech, Wertach und Iller eingetragen.

Der Verlauf ihrer in die oberen Bodenschichten teilweise tief eingeschnittenen Gerinne läßt durchweg eine nach Westen gerichtete Ausbuchtung deutlich erkennen und weist auf eine bereits seit Jahrhunderten im Gange befindliche Bewegung dieses ganzen Gebietes nach Westen hin, welche durch die Koordinatenänderung der Dreieckspunkte der südbayerischen Dreieckskette für eine geringe Zeitspanne der Neuzeit im vorstehenden ziffermäßig nachgewiesen ist.

Ein neuer Placodontier aus dem Rhaet der bayerischen Alpen.

Von F. Broili.

Vorgetragen in der Sitzung am 5. Juni 1920.

Schon einmal war mir Gelegenheit gegeben, über einen Wirbeltierrest aus den Kössener Schichten der sowohl Touristen wie Geologen wohl bekannten Kothalpe am Wendelstein in den bayerischen Alpen zu berichten[1]), nun setzt mich ein weiterer Fund von dieser an Evertebraten unerschöpflichen Lokalität, den mir der Finder Herr K. A. Moll freundlichst zur Untersuchung überantwortet hat, in den Stand, einen anderen Saurier des rhätischen Meeres bekannt zu machen.

Ein glücklicher Schlag mit dem Hammer auf ein Gesteinsstück der Kössener Lumachelle hatte die hauptsächlichsten Teile des Restes, nämlich ein großes Stück der Schädelunterseite freigelegt, die übrigen noch von Gestein umgebenen Knochenteile wurde von Herrn Moll selbst herauspräpariert und mir so übergeben. Demnach zeigt sich der Fund als die hintere unvollständige Hälfte eines Schädels, der allerdings, was die Oberseite anbelangt, ziemlich stark durch den Gebirgsdruck in Mitleidenschaft gezogen und deformiert wurde.

Betrachten wir zunächst den erhaltenen Teil der Gaumenfläche, so fällt uns vor allem als die am meisten charakteristische Eigentümlichkeit derselben die auffallende Bezahnung derselben in die Augen: Zwei median gelegene große, ovale,

[1]) F. Broili, Über die Reste eines Nothosauriden aus den Kössener Schichten. Zentralblatt für Mineralogie, Geologie und Paläontologie 1907, S. 337.

tief braun gefärbte, glänzende Pflasterzähne, vor denen zwei ebensolche, aber in ihren Ausmaßen bedeutend kleinere liegen, die sich durch ihre dunkle Farbengebung scharf von dem helleren Braun der sie umgebenden Knochen abheben. Die hinteren Zähne besitzen bei einem Längsdurchmesser von ca. 1,7 cm einen Querdurchmesser von ca. 1,4 cm, von ihrer Mitte strahlen wellige, allmählich schwächer werdende Runzeln nach den Seitenrändern, welche nahezu glatt, wulstartig die mittlere flache und teilweise leicht eingesenkte Partie des Zahnes umrahmen. Die Längsaxen beider Zähne konvergieren stark nach vorne, so daß sie in ihrem vorderen Drittel sehr nahe aneinander herantreten und der hinten zwischen ihnen hervortretende Zwickel der Gaumenknochen bedeutend größer wird als der vordere. Dicht vor ihnen sitzen zwei weitere, aber um vieles kleinere Pflasterzähne. Von der gleichen Farbe wie ihre rückwärtigen Partner sind sie mehr gerundet wie diese, ihr Längsdurchmesser beträgt 0,5, ihr Querdurchmesser 0,4 cm.

Von nahezu glatter Oberfläche ist ihre Mitte mäßig aber deutlich eingesenkt, so daß die dadurch wulstartig werdenden Seitenränder wohl hervortreten; beide Zähnchen lagern sich so dicht aneinander, daß ihre mittleren Seitenränder sich fast berühren. Reste von weiterer Bezahnung sind nicht zu finden.

Direkt vor diesen beiden kleineren Gaumenzähnen wird in der Mittellinie des Schädels die rückwärtige Hälfte einer spitz nach hinten auslaufenden kleinen Grube sichtbar, in deren Grund sich eine wenn schon durch die Präparation etwas beschädigte, aber immerhin deutliche kräftige, knöcherne Medianleiste hinzieht. Ich betrachte diese Grube als die Choanenöffnung, welche durch ein Septum, wahrscheinlich das Vomer, geteilt wird.

Der rückwärts von den beiden großen Zähnen gelegene Teil der Gaumenseite fällt einer ursprünglich vermutlich mehr oder weniger ebenen, jetzt aber durch den Gebirgsdruck mehrfach gebrochenen und im Laufe der Diagenese wieder ausgeheilten unregelmäßigen Fläche zu, an der sich kaum mit absoluter Sicherheit irgendwelche Knochennähte beobachten lassen.

Immerhin glaube ich in der Mitte Spuren einer median nach vorne verlaufenden Längsutur sehen zu können, welche die paarigen Pterygoidea und Palatina voneinander trennt. Der beste erhaltene Teil dieser Gaumenfläche ist ihr hinterster in leichter Bogenform nach rückwärts abgeschlossener Abschnitt. Die Oberfläche der an seinem Aufbau beteiligten Knochen, es dürften im wesentlichen nur die Pterygoidea, vielleicht auch noch die rückwärtigen Teile der Palatina sein, zeigt median deutliche Runzeln, wie wir sie ähnlich auf den Belegknochen des Schädeldaches mancher Stegocephalen antreffen, auch auf der linken mehr oder weniger ebenflächigen Seite kann man diese Runzeln beobachten, während die rechte Seite durch den Gebirgsdruck fast senkrecht gestellt wurde.

In der Mitte hinter der Gaumenfläche, von dieser aber deutlich abgesetzt, ragt ein vierseitiger durch die Erhaltung und die Präparation stark mitgenommener Fortsatz nach rückwärts; die Reste des Basioccipitale. Ebenso ungünstig erhalten

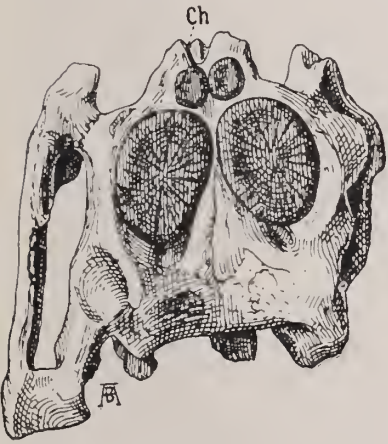


Fig. 1

Fig. 2

1. Placochelys alpis sordidae sp. nov. Schädelfragment von unten. Kössener Schichten. Kothalpe. Wendelstein. Nat. Größe.
2. Desgl. von oben. *O* Hintere Begrenzung des Auges. *S* Schläfen-Öffnung. *Ch* Choane.

ist auch die rechte hintere Ecke des Schädels, d. h. die Region des Quadratums und des mit demselben sich vereinigenden hinteren Flügels des Pterygoids, irgend welche Spuren einer Gelenkfläche am Quadratum sind nicht mehr festzustellen.

Von der Schädeloberseite sind nur einzelne Teile, die mehr oder weniger unvollständig im gegenseitigen Zusammenhang stehen, erhalten. Zunächst zeigt sich auf der linken Seite in guter Erhaltung ein sehr wichtiger Abschnitt: die Region des Postfrontale und Postorbitale mit einzelnen Resten der Regionen von Jugale und? Squamosum. Diese Knochen zeigen eine höckerige runzelige Skulptur, ihre Grenzen lassen sich nach den Ossifikationszentren, von denen diese Rauhigkeiten auszustrahlen scheinen, vermuten, außerdem zeigen sich zwischen Postfrontale und Postorbitale meines Erachtens auch deutliche Spuren einer Naht. Jedenfalls kommt aber unter den genannten Schädelelementen dem Postorbitale die größte Ausdehnung zu.

Postfrontale, Postorbitale und Jugale bilden die hintere Begrenzung der Augenöffnung. Dieselbe ist wohl erhalten und läßt erkennen, daß das ziemlich große Auge — der größte meßbare Durchmesser beträgt an den Außenrändern ca. 1,6 cm — wohl einen rundlichen Umriß besessen hat und schräg nach vorne und seitlich gestellt war. Der Hinterrand des gleichen Knochenkomplexes zeigt gleichzeitig die teilweise gut erhaltene vordere Umrahmung der Schläfengruben, die obere Umrahmung derselben wird durch ein Knochenstück gebildet, das jetzt durch die Präparation isoliert, doch noch deutlich den Anschluß an die Postfrontal-, Postorbital-Region einerseits wie an eine hintere, allerdings stark verdrückte und deshalb nicht näher analysierbare Partis des Schädels andererseits zu erkennen gibt — es sind die eng miteinander verbundenen Parietalia. Dieser Komplex ist äußerst bezeichnend skulptiert mit runzligen bis grubig-höckerig verzierten Knochenbuckeln; ähnlich wie bei Placochelys kann man 6 solcher Erhöhungen auseinander halten: 2 in der Mittellinie und je 2 an der Seite, der hinterste median gelegene ist der hervorragendste, die 3 vorderen verflachen sich allmählich nach vorne.

Das Foramen parietale, welches wohl analog wie bei Placochelys vor dem mittleren vorderen Knochenbuckel gelegen sein dürfte, ist nicht mehr erhalten. Leider fehlt der weitere rückwärtige seitliche Anschluß an das Squamosum, so daß über die hintere Begrenzung der Schläfengrube keine weiteren Angaben gemacht werden können, meiner Schätzung nach dürfte ihr größter Durchmesser mindestens 2 cm betragen haben.

Auf der rechten Seite ist die untere Begrenzung der Schläfengrube, d. h. ansehnliche Reste der Region des Jugale und Squamosum erhalten geblieben, auch Teile des Postorbitale sind daran noch beteiligt, ebenso zeigt sich noch der unten allerdings ziemlich breit gedrückte Teil von der Umrahmung des rechten Auges. Auch hier haben wir auf den Knochen eine runzlige Oberflächenskulptur.

Die geschickte Hand des Herrn Moll hat auch teilweise die Dorsalseite der Gaumenknochen freigelegt, aber auch hier erhalten wir keinen Aufschluß über die Knochengrenzen; äußerst störend dabei und leicht irreführend sind durch den Gebirgsdruck veranlaßte und wieder ausgeheilte Bruchstellen, ähnlich wie bei Placochelys und Placodus scheint ebenso hier auf der Dorsalseite das Transversum einen größeren Raum eingenommen zu haben wie auf der Ventralseite.

Die Breite des Schädels 1. am Hinterrand gemessen von Quadratum zu Quadratum dürfte 6 cm und 2. in der Höhe der beiden Augenvorderränder, wenn man die Druckwirkung in Anrechnung bringt, wohl fast 4 cm betragen haben. Die Länge des Restes gemessen in der Mittellinie ist 4,2 cm.

Auf Grund dieser Beschreibung geht hervor, daß wir es bei dem vorliegenden Fund mit einem Angehörigen der Placodontier und zwar, wie aus den dabei gemachten Hinweisen schon hervorgegangen sein dürfte, wohl mit dem Genus Placochelys selbst zu tun haben dürften. Diese bis jetzt nur in 2 Schädeln und verschiedenen Skeletteilen bekannte Gattung aus den Veszprémer Mergeln des Balaton-Sees, marinen Ablagerungen, welche nach Jaekel den Raibler Schichten

entsprechen, ist von diesem Autor[1]) in seiner schönen Monographie eingehend beschrieben worden.

Mir liegt der ausgezeichnete Gipsabguß des besten der Jaekelschen Originale von Placochelys placodonta vor, und bei dem Vergleiche desselben mit unserem Stücke geht hervor, daß das letztere einer beträchtlich kleineren Art der Gattung angehört wie die ungarische Raibler Form. Dieselbe nämlich zeigt in der Mittellinie des Schädels eine Gesamtlänge von 11,6 cm und in der gleichen Richtung bis zur Gaumenöffnung 7,5 cm Länge auf, während unser Exemplar nur 4,2 cm aufzuweisen hat. Auch in der Skulptur scheinen Unterschiede zu bestehen, so ist die Unterseite unserer Pterygoidea mit deutlichen Runzeln bedeckt, die der von Placochelys placodonta hingegen aber glatt — ebenso ist die Anordnung der 6 Knochenbuckel auf dem Parietale gegenseitig eine etwas abweichende und der vordere der beiden seitlichen Buckel bei Placochelys placodonta zum mindesten eben so stark wie der hintere, während bei unserem Exemplar der vordere schwächer ist. Schließlich scheint die Schläfenöffnung des letzteren relativ größer zu sein als bei dem ungarischen Vertreter.

Ich stelle deshalb auf Grund der bisher bekannten Eigentümlichkeiten unser Schädelfragment mit Vorbehalt zur Gattung Placochelys Jaekel und sehe mich auf die angedeuteten Unterschiede hin veranlaßt, zu denen noch die große zeitliche Differenz zu stellen wäre, eine neue Art zu schaffen.

Nach dem klassischen Fundort in den bayerischen Alpen sei deshalb das Stück Placochelys alpis sordidae spec. nov. benannt!

Das Tier fand, wenn wir uns die Annahme Jaekels zu eigen machen, daß es sich bei Placochelys um einen Muschelfresser handle, in der reichen Mollusken- und Molluscoiden-Fauna der rhätischen Stufe, herrliche Futterplätze.

[1]) O. Jaekel, Placochelys placodonta aus der Obertrias des Bakony. Resultate der wissenschaftl. Erforschung des Balaton-Sees. I. B., 1. Teil. Pal. Anhang. Budapest 1907.

Bei der großen Ähnlichkeit der Zähne von Placodus und Placochelys läßt es sich kaum sagen, ob der von L. v. Ammon[1]) als Placodus Zitteli beschriebene Zahn nicht auch zu Placochelys gehört. Jedenfalls gehört dieser aus dem Plattenkalk, also aus dem Liegenden der Kössener Schichten stammende Zahn vom Ansetzberg bei Partenkirchen einem sehr großen Placodontier an, denn sein Längsdurchmesser beträgt 3,3 cm, sein Querdurchmesser 2,3 cm. Der mehr rundliche Umriß des Zahnes scheint, wenn die spärlichen Funde von Placochelys diesen allgemeinen Rückschluß erlauben, mehr für diese Gattung als für Placodus zu sprechen, bei dem der Umriß der Gaumenzähne ein mehr vierseitiger ist. Das gleiche gilt auch für zwei weitere im Besitz der bayer. Staatssammlung befindliche Stücke aus dem Rhät des Wundergrabens bei Ruhpolding und dem Rhät des Marmorgrabens bei Mittenwald, während ich bei drei andern Placodontierzähnen aus den Alpen im Zweifel bin; sie stammen 1. aus dem Fleckgraben der Enning Alpe im Ammergauer Gebirg aus dem Rhät, 2. aus dem Periodengraben bei Linderhof aus dem Rhät, und 3. aus den Raiblerschichten von Raibl in Kärnten. Dagegen besitzt ein Zahn, den Herr cand. geol. v. Freyberg im Jahre 1917 im bekannten Muschelkalkbruch am Burgberg bei Lenggries sammelte, mehr vierseitigen Umriß, weshalb ich ihn zu Placodus selbst stellen möchte.

Es wäre nun sehr verlockend, den bekannten Panzertypus von Psephoderma alpinum (H. v. Meyer)[2]) aus dem rhätischen Kalk von Ruhpolding, von welcher Gegend, wie oben gesagt, auch ein gleichaltriger Placodontierzahn vorliegt, und von dem in der bayerischen Staatssammlung noch weitere Panzer-

---

[1]) L. v. Ammon, Die Gastropoden des Hauptdolomits und des Plattenkalks der Alpen. Abh. d. geol.-mineralog. Vereins zu Regensburg, 11. Heft, 1878, p. 53, Anm.

[2]) Psephoderma alpinum aus dem Dachsteinkalk der Alpen. Palaeontographica 6, S. 246. Über Psephoderma der Südalpen siehe auch bei Deecke, Über Lariosaurus etc., Zeitschr. d. D. geolog. Ges. 18, 1886, S. 196.

fragmente: nämlich sogar eines aus der Nachbarschaft der Kothalpe, aus einem Kössener Graben zwischen Schweinsberg und Thierhamer Alpe am Wendelstein, und ein zweites aus den Kössener Schichten am bekannten Kamin des Scesaplana-Gipfels im Rhäticon vorhanden sind, mit Placochelys zu vereinigen; ich möchte mich indessen einstweilen in dieser Hinsicht dem zurückhaltenden Urteil Jaekels[1]) gegenüber der Meinung von E. Fraas[2]) und v. Huene[3]) anschließen, der, abgesehen von den verschiedenen Differenzen in der Form und der Anordnung der einzelnen Elemente des Panzers, auf Grund seiner histologischen Untersuchungen bei Psephoderma und Placochelys nachweisen konnte, daß die mikroskopische Struktur beider voneinander doch recht abweicht.

Die Zähne eines kleinen Placodus, den Frhr. v. Wöhrmann aus den Cardita-Schichten vom Thierberg bei Seehaus nennt (Fauna der sog. Cardita und Raibler Schichten in den Nordtiroler und bayer. Alpen. Jahrb. d. K. K. geol. Reichsanstalt 1889, 39. Bd., S. 233), liegen mir leider nicht vor, vielleicht handelt es sich bei ihnen um Fischzähne, und ebenso bin ich bei einem Zahnfragment aus den roten Raiblern des Schlernplateaus unsicher, ob wirklich ein Placodus vorliegt, wie v. Wöhrmann meint (Die Raibler Schichten etc., ibid. 1893, 43. Bd., S. 693).

Jedenfalls geht aber, abgesehen von den letzten zwei nicht sicheren Angaben aus dieser stattlichen Zahl von sicheren Placodontiern von insgesamt 8 Fundorten, die sich auf die alpine Trias vom Muschelkalk — bis zum Rhät verteilen, hervor, daß diese Reptilgruppe in der ozeanischen Trias eine große Verbreitung besaß, zumal, wenn man bedenkt, daß es sich bei diesen Funden lediglich um durch ihr cha-

---

[1]) Jaekel, l. c., S. 53.

[2]) E. Fraas, Reptilien und Säugetiere in ihren Anpassungserscheinungen an das marine Leben. Jahreshefte d. Ver. für vaterländische Naturkunde 61, 1905, S. 368.

[3]) v. Huene, Übersicht über die Reptilien der Trias. Pal. und Geol. Abhandlungen. Jena, Fischer, 1902, S. 33.

rakteristisches Aussehen leicht sichtbare Zufallstreffer[1]) handelt und nicht um so ausgezeichnet seit langen Zeiten durch die Steinindustrie sowohl wie durch Sammler systematisch erschlossene Gebiete, wie dies bei dem faunistisch armen Binnenmeersediment des germanischen Muschelkalks der Fall ist. Daß in den ozeanischen Sedimenten der alpinen Trias beträchtlich mehr Reste von Wirbeltieren zu erhoffen wären, wenn wir die nötigen Mittel zu einem systematischen Abbau der betreffenden Schichten zur Verfügung hätten, ist leicht verständlich. Daß sie wirklich zu bekommen sind, beweisen unter anderem die technisch abgebauten sogenannten Asphaltschiefer des Hauptdolomits der Nordalpen, die, abgesehen von einem problematischen Teleosaurus (Kner, Sitzungsber. d. K. Akad. d. Wiss. Wien 56, I, 1867), eine stattliche Reihe schöner Fischreste geliefert haben, vor allem aber die bituminösen Schiefer der mittleren Trias[2]) (anisischer Stufe) im Tessin und den angrenzenden italienischen Gebietsteilen, die durch den bergmännischen Abbau außer Fischen eine große Zahl von Sauropterygier- und Ichthyosaurier-Skeletten sowie das als Flugsaurier gedeutete Geschlecht Tribelesodon Bassani gewinnen ließen, welche, abgesehen von älteren Arbeiten vor allem in den neueren Publikationen von Bassani[3]), Deecke[4]), Boulenger[5]), Repossi[6]) und Wiman[7]) näher untersucht wurden.

---

[1]) Partanosaurus und Microleptosaurus Skuphos. Abhandl. d. K. K. geol. Reichsanstalt, Bd. XV, Heft 5, 1893, und Metopias Sanctae crucis Koken, ibidem, Bd. XVI, Heft 4, 1913 sind auch Zufallsfunde.

[2]) A. Frauenfelder, Beiträge zur Geologie der Tessiner Kalkalpen. Eklogae Geol. Helvet. Vol. 14, No. 2, 1916, S. 263 etc.

[3]) F. Bassani, Sui fossili e sull' età degli schisti bituminosi triasici di Besano in Lombardia. Atti d. Soc. Ital. Sci. nat. Vol. 29, 1886.

[4]) W. Deecke, Über Lariasaurus und einige andere Saurier des lombard. Trias. Zeitschr. d. D. geol. Gesellsch. 38, 1886, S. 176.

[5]) A. Boulenger, On a Nothosaurian Reptile from the Trias of Lombardy etc. Transact. Zool. Soc. London. Vol. 14, 1896, S. 1.

[6]) E Repossi, Il Mixosauro degli strati triasici di Besano in Lombardia. Atti Soc. Ital. Sci. Nat. Vol. 41, 1902, S. 361.

[7]) C. Wiman, Über Mixosaurus cornalianus Bass. Bull of the Geol. Inst. of Upsala. Vol. XI, S. 230.

Wie gerade diese Sauropterygier und Ichthyosaurier aus der alpinen und soweit sie von dort bekannt sind, aus der arktischen und kalifornischen Trias uns eine Erklärung geben für die großartige Entwicklung dieser Reptilordnungen zur Zeit des Jura, so müssen wir andererseits die Erklärung für das Auftreten derselben in der Trias und anderer am Schlusse der Trias bereits erlöschender mariner, hochgradig differenzierter Reptilgruppen wie der Placodontier Europas mit unserem Placochelys alpis sordidae und der nordamerikanischen Thalattosaurier wohl in der Hauptsache nicht in der Tierwelt der Kontinentalbildungen des Perm, sondern in den ozeanischen Ablagerungen dieser Formation suchen, welche erst im Laufe der letzten Jahrzehnte in Bezug auf ihre Evertebraten-Fauna näher in den Kreis der Erkenntnis gezogen wurde und die sicher, ebenso wie in gewissem Maße bisher die ozeanische Trias, eine Wirbeltier-Fauna in sich schließt, die noch der Entdeckung harrt.

München, März 1919.

Über die Paragenese von α-Quarz und Kohlensäure.

Von A. Johnsen in Kiel.

Mit 2 Figuren und 3 Tabellen im Text.

Vorgelegt von P. v. Groth in der Sitzung am 5. Juni 1920.

Einleitung.

Paragenese soll die gleichzeitige oder die sukzessive Entstehung mehrerer Mineralarten aus gemeinsamer Mutterlauge bedeuten. Die Untersuchung zweier paragenetischer Mineralien ergibt simultane Bedingungsgleichungen für die Paragenese, so daß diese genauer erforscht werden kann als die Genese einer vereinzelten Mineralart.

Dementsprechend wird sich im folgenden zeigen, daß der Spielraum der Bildungsmöglichkeiten einer Paragenese von α-Quarz und Kohlensäure viel enger ausfällt als das Existenzgebiet des bloßen Minerales Quarz.

I.

Die Entstehung von α-Quarz.

Setzt man die geotherme Tiefenstufe gleich 33 m für 1° C. und die geobare Tiefenstufe gleich 4 m für 1 Atmosphäre, so stehen in jeder Erdtiefe die Temperatur t und der Druck p in der Beziehung

$$t : p = 4 : 33. \tag{1}$$

Temperatur t_u und Druck p_u der Umwandlung von α-Quarz in β-Quarz sind durch folgende Gleichung miteinander verbunden

$$t_u = 575 + k \cdot p_u. \tag{2}$$

Die „Konstante“ k erhält man aus der Clausius-Clapeyronschen Gleichung, wenn man diese in erster Näherung schreibt

$$k = \frac{T_u (v_\beta - v_\alpha)}{Q \cdot 10^3}. \tag{3}$$

Hierin ist die absolute Umwandlungstemperatur $T_u = 575 + 273$, die Differenz der spezifischen Volumina[1]) von β-Quarz und α-Quarz bei T_u gleich $v_\beta - v_\alpha = 0.0026$ und endlich $Q = 0.178$ die in Literatmosphären gemessene Zunahme der Gesamtenergie bei der Umwandlung von 1 Gramm α-Quarz in β-Quarz; Q ist das Arbeitsäquivalent der Wärmetönung $q = 4.3$ Grammkalorien, die von F. E. Wright[2]) und E. S. Larsen[2]) gemessen wurde.

Aus (3) ergibt sich $k = 0.012$.

Um die Temperatur zu ermitteln, bei der sich im Erdinnern die beiden Quarzarten ineinander umwandeln, haben wir in (1) $t = t_u$ und $p = p_u$ zu setzen; dann folgt aus (1) und (2) $t_u = 639^0$ und $p_u = 5272$ Atmosphären; diesen Werten entspricht eine Erdtiefe $\vartheta = 21.1$ km als Maximaltiefe, über die hinaus eine Bildung von α-Quarz unmöglich ist, wofern nicht der Druck anomal schnell oder die Temperatur anomal langsam mit der Erdtiefe wächst.

In Fig. 1 enthält die Diagonale die figurativen Punkte derjenigen Temperatur-Druckpaare, welche in den dabei vermerkten Erdtiefen ϑ normalerweise herrschen. Diese „Geothermobare“ wird von der in erster Näherung geradlinigen Umwandlungskurve bei $t = 639^0$, $p = 5272$ Atmosphären und $\vartheta = 21.1$ km in zwei Stücke zerschnitten, welche die unterirdischen Existenzbedingungen von α-Quarz und β-Quarz darstellen.

[1]) Vgl. J. Koenigsberger, N. Jahrb. f. Miner. etc. Beil., Bd. **32**, 108, 1911.

[2]) F. E. Wright und E. S. Larsen, Zeitschr. f. anorg. Chem., **68**, 338, 1910.

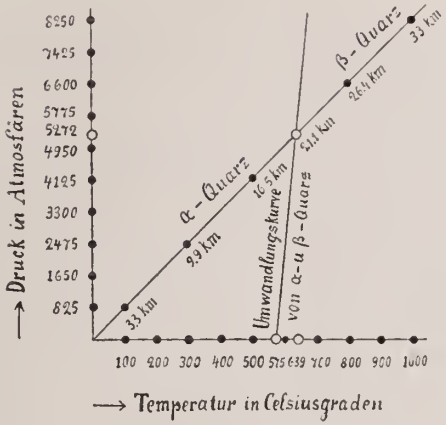


Fig. 1

II.

Die Entstehung gewisser Aggregatzustände der Kohlensäure.

Ein laut Etikette von Mursinka stammender Amethyst[1]) des Kieler Mineralogischen Instituts zeigt in einem Hohlraum flüssige und dampfförmige Kohlensäure nebeneinander. Bei + 20° C. nimmt die flüssige Phase etwa 70 %, die dampfförmige etwa 30 % des Hohlraumes ein; die beiderseitige Grenze wandert beim Erwärmen durch den Dampfraum hin, den sie bei nahezu 30° völlig durchlaufen hat. Auf jeden Fall hat sich aller Dampf unterhalb der kritischen Temperatur von 31.35° C. kondensiert, da sonst die immer langsamer wandernde und immer unschärfer werdende Grenzlinie zum Stillstand kommen und zugleich verschwinden müßte, bevor sie den Dampfraum völlig durchschritten hat.

Es darf als höchst wahrscheinlich angenommen werden, daß die Kohlensäure nicht in zwei Phasen, sondern als eine

[1]) Vor einigen Jahren von der Firma Krantz-Bonn bezogen; wahrscheinlich handelt es sich um das Vorkommen vom Dorfe Lipowaja unweit Mursinka im Bezirk Jekaterinburg; vgl. C. Hintze, Handb. d. Miner. I, 1418—19, 1905.

einzige von dem wachsenden Quarzkristall umschlossen wurde[1]). Zugleich aber leuchtet ein, daß die Temperatur des Verschwindens[2]) der Dampflibelle keineswegs gleich derjenigen der Kristallbildung zu sein braucht.

Die Dichte des bei + 20° gesättigten CO_2-Dampfes sei mit ϱ_d bezeichnet, diejenige der mit ihm im Gleichgewicht befindlichen CO_2-Flüssigkeit mit ϱ_f und diejenige der Kohlensäure zur Zeit und am Ort der Quarzbildung mit ϱ; bedeutet nun v das gegenwärtige Hohlraumvolumen bei + 20°, so ist v sehr annähernd gleich dem Volumen der Kohlensäure zu der Zeit, da sie eingeschlossen wurde, denn Quarz zieht sich selbst bei Abkühlung von 1000° bis auf Zimmertemperatur nur um etwa 3 Volumprozente zusammen. Folglich stellt sowohl das Produkt $v \cdot \varrho$ als auch die Summe der Produkte $\frac{30}{100} v \cdot \varrho_d$ und $\frac{70}{100} v \cdot \varrho_f$ die gesamte CO_2-Masse dar und somit ist

$$\varrho = \tfrac{3}{10} \varrho_d + \tfrac{7}{10} \varrho_f. \tag{4}$$

Da nach Tabelle A[3]), bezogen auf Wasser, $\varrho_d = 0.190$ und $\varrho_f = 0.766$ ist, so ergibt sich $\varrho = 0.60$; dies ist nach derselben Tabelle die Dichte flüssiger, bei + 30° mit ihrem Dampf im Gleichgewicht befindlicher und somit einem Druck von 70.7 Atmosphären ausgesetzter Kohlensäure. Jedoch zeigt Tabelle B, daß in derjenigen Erdtiefe ϑ, deren normale Temperatur + 30° beträgt, d. h. in 1000 m Tiefe, ein viel höherer Druck, nämlich ein solcher von 251 Atmosphären herrscht; daher ist dort auch die CO_2-Dichte erheblich größer als 0.60 und zwar 0.68. Aus dieser Tabelle ersehen wir zugleich, daß in Tiefen von mehr als 1 km, deren Temperaturen oberhalb der kritischen (31.35°) liegen, die CO_2-Dichte weiterhin zunimmt, so daß sie bei $3^1/_2$ km etwa gleich $\varrho = 0.8$ wird.

---

[1]) Diese Annahme machte für derartige Einschlüsse bereits H. Cl. Sorby in seiner klassischen Arbeit (Quart. Journ. Geol. Soc. 14, 453. London 1858).

[2]) A. Karpinsky fand für drei Amethyste von Lipowaja bei Mursinka 28.3°, 30.1° und 30.6° (Ref. in Zeitschr. f. Krist. 6, 280, 1882).

[3]) E. H. Amagat, Compt. rend. 114, 1093. Paris 1892.

Tabelle A.

Temperatur in Celsiusgraden	Druck des gesättigten CO_2-Dampfes in Atmosphären	Dichte ϱ_d des gesättigten CO_2-Dampfes	Dichte ϱ_f des flüssigen CO_2 (im Gleichgewicht mit Dampf)
0	34.3	0.096	0.914
+ 5	39.0	0.114	0.888
+ 10	44.2	0.133	0.856
+ 15	50.0	0.158	0.814
+ 20	56.3	0.190	0.766
+ 25	63.3	0.240	0.703
+ 30	70.7	0.334	0.598
+ 31.35	72.9	0.464	0.464

Tabelle B.

Erdtiefe ϑ in Metern	Temperatur t in Celsiusgraden	Druck p in Atmosphären	Dichte ϱ des CO_2
1000	30	251	0.68 (flüssig)
1328	40	333	0.70 (gasförmig)
2796	84	700	0.75 „
3304	100	827	0.77 „

Berechnet wurden diese ϱ-Werte oder zunächst die ihnen entsprechenden Volumina v der Gramm-Molekel aus der van der Waalsschen Gleichung $\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT$; mißt man hierin die Drucke p in Atmosphären und die Volumina in Litern, so wird $R = 0.08207$, während die beiden CO_2-Konstanten[1]) die Größen $a = 3.466$ und $b = 0.04146$ annehmen.

Somit ergab sich, daß der untersuchte CO_2-Einschluß in keiner einzigen Erdtiefe bei denjenigen Temperaturen und Drucken entstehen konnte, die sich aus der geothermen und

[1]) Umgerechnet aus Landolt-Börnsteins Physikal.-Chem. Tabellen (3. Aufl., S. 188, Berlin 1905), wo a und b auf andere Maßeinheiten bezogen sind.

der geobaren Tiefenstufe berechnen. Da nun die CO_2-Dichten der Tabelle B, die auch auf der Geothermobare der Fig. 2 vermerkt sind, den berechneten Wert $\varrho = 0.60$ beträchtlich überwiegen, so hat man für den Ort und die Zeit der CO_2-Bildung entweder anomal hohe Temperatur oder anomal geringen Druck anzunehmen. Wir betrachten zunächst den ersteren Fall und setzen in der erwähnten Zustandsgleichung für a und b wieder die obigen Konstanten und für v das in Litern gemessene Molvolumen $^{44}/_{0.6.10^3} = 0.0733$ ein. Dann folgt aus

$$t_x = \frac{(p_x + 645) \cdot 0.0318}{0.08207} - 273 \tag{5}$$

für den Druck p_x irgend einer Erdtiefe ϑ diejenige Temperatur $t_x = T_x - 273$, auf welche der Ort der Quarzbildung in der Tiefe ϑ erwärmt gewesen sein muß. Nennen wir die normale Temperatur der Tiefe ϑ wieder t, so stellt $\Delta t = t_x - t$ die anomale Temperaturerhöhung dar.

In der Tabelle C ist dies für mehrere Erdtiefen ϑ bis zu etwa $6^1/_2$ km durchgeführt. Tragen wir die p_x-Werte und die t_x-Werte dieser Tabelle in das Koordinatensystem der Fig. 2 ein, so liegen die figurativen Punkte auf einer und derselben Geraden und diese repräsentiert die Isochore[1]) der Kohlensäure für die Dichte $\varrho = 0.60$.

Tabelle C.

Erdtiefe ϑ in Metern	Druck $p = p_x$ in der Tiefe ϑ, in Atmosphären	Temperatur t_x in Celsiusgraden	Anomale Erhitzung $\Delta t = t_x - t$	Dichte ϱ des CO_2
284	72	30	22	0.60 (flüssig)
1000	251	74	44	„ (gasförmig)
1328	333	106	66	„ „
1984	497	170	110	„ „
2796	700	248	164	„ „
6368	1593	594	403	„ „

[1]) Daß die Isochoren der Gase, Dämpfe und Flüssigkeiten geradlinig sind, folgt unmittelbar aus der allgemeinen Form der van der Waalsschen Zustandsgleichung.

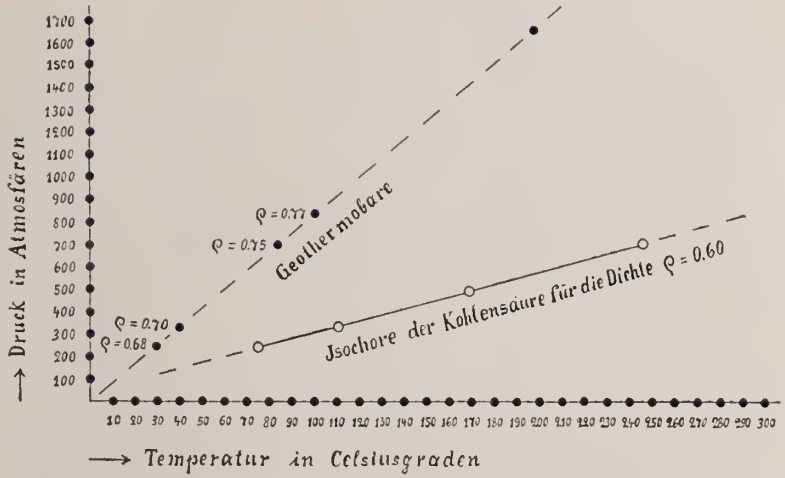


Fig. 2

III.

Die Paragenese von α-Quarz und Kohlensäure.

Da sich unser Amethyst von Mursinka beim Atzen mit *HF* als frei von Zwillingsbildung nach dem Schweizer Gesetz erwies, so ist er nicht aus β-Quarz hervorgegangen, sondern entspricht einer Paragenese von α-Quarz und Kohlendioxyd, für die nunmehr die maximale Erdtiefe berechnet werden soll. Diese Paragenese muß offenbar der Kohlensäure-Gleichung (5) und zugleich der Quarz-Gleichung (2) gehorchen. Somit folgt

$$(6) \qquad 575 + k \cdot p_x = \frac{(p_x + 645) \cdot 0.0318}{0.08207} - 273,$$

wonach sich $p_x = 1593$ Atmosphären ergibt; hieraus findet man die Erdtiefe $\vartheta = 6368$ m und deren normale Temperatur $t = 191^0$ C. Dagegen liefert (2) für $p_u = p_x = 1593$ Atmosphären die wirkliche Temperatur $t_u = t_x = 594^0$ und demnach eine Erhitzung um $\Delta t = t_x - t = 403^0$. Statt solcher Erhitzungen kann man, wie wir bereits sahen, auch Druck-

entlastungen annehmen; dann ist $p_x = \frac{t_x - 575}{k}$ statt $t_x = 575 + k \cdot p_x$ aus (2) in (5) einzusetzen; hierdurch wird die Temperatur der Paragenese zwar wieder 594°, aber sie führt, als normale Erdtemperatur betrachtet, zu einer Tiefe von fast 20 km statt $6^1/_2$ km. Es ist jedoch kaum zweifelhaft, daß man bereits für $6^1/_2$ km Tiefe, wo normalerweise etwa 1600 Atmosphären Druck und 200° C. herrschen, Hohlräume und Entlastungen nicht in Betracht ziehen darf.

Schluss.

Die Bemerkungen der Einleitung haben sich verwirklicht. Während die Erdhülle, in der sich α-Quarz bilden kann, über 21 km mächtig ist, muß sich der durch gewisse Kohlensäureeinschlüsse ausgezeichnete α-Amethyst von Mursinka in einer Erdtiefe von nicht mehr als $6^1/_2$ km gebildet haben; überdies lag die Temperatur am Orte der Paragenese, je nach seiner Erdtiefe, um bestimmte Beträge Δt über dem normalen Wert und zwar wächst Δt mit der Tiefe ϑ, bis bei $\vartheta = 6^1/_2$ km die anomale Erhitzung den Betrag $\Delta t = 400°$ erreicht und eine Temperatur von fast 600° zur Folge hat; der Amethyst stellt also eine thermale Bildung dar. Diese Zahlen gelten für den besonderen Fall, wo bei + 20° die Volumina der flüssigen und dampfförmigen Kohlensäure annähernd 70 % und 30 % des Hohlraumes im Quarz ausmachen. Die angewandte Methode aber kann naturgemäß auf andere Volumverhältnisse übertragen werden.

Eine Anwendung auf Quarzkristalloblasten vermag vielleicht genauere Vorstellungen über Gesteinsmetamorphose herbeizuführen.

Über den Giftstoff der Kröte.

Von **Heinrich Wieland.**

Vorgelegt in der Sitzung am 5. Juni 1920.

In einer vor sieben Jahren gemeinsam mit Friedr. Jos. Weil, meinem leider inzwischen verstorbenen ausgezeichneten Mitarbeiter, veröffentlichten Abhandlung[1]) habe ich den krystallisierten Giftstoff von Bufo vulgaris, von unserer einheimischen Kröte beschrieben. Analysen und Molekulargewichtsbestimmung führten für das Bufotalin zur Formel $C_{16}H_{24}O_4$. Mit konzentrierter Salzsäure behandelt geht Bufotalin in eine, wie wir annahmen, Anhydroverbindung über, das sogenannte Bufotaliën, $C_{16}H_{20}O_2$, in dessen Entstehung wir eine sichere Stütze für die von uns aufgestellte Formel sahen.

Die Untersuchung ist, durch Krieg und Revolution unterbrochen, gemeinsam mit Herrn Paul Weyland fortgesetzt worden. Die sichere Beherrschung der Kunst der Mikroanalyse durch meinen Mitarbeiter hat es ermöglicht, daß wir trotz der geringen Stoffmengen, die zur Verfügung standen, einen tieferen Einblick in den Aufbau des interessanten Giftes gewinnen konnten.

In der zitierten Abhandlung wird das Bufotalin als gesättigter Körper beschrieben, da es bei der Baeyerschen Probe auf Doppelbindungen der Einwirkung des Permanganats einige Zeit lang Stand hält. Als aber die Reaktion der katalytischen Hydrierung zu dieser Prüfung herangezogen wurde, ergab sich, daß Bufotalin ziemlich rasch Wasserstoff aufnimmt und dabei

[1]) Ber. d. deutschen chem. Ges. 46, 3315 (1913).

in eine schön krystallisierte neue Verbindung, das Hydrobufotalin übergeht. Es liegen also beim Bufotalin ähnliche Verhältnisse vor wie beim Cholesterin, dessen „versteckte" Doppelbindung nicht durch Permanganat, wohl aber bei der katalytischen Hydrierung enthüllt wird[1]). Die Hydrierungsreaktion ist demnach für die Aufdeckung ungesättigter Bindungen weitaus zuverlässiger als die Permanganatprobe.

Bei der vorsichtigen Oxydation mit Chromsäure verwandelt sich das Bufotalin in ein Keton, das wir als Bufotalon bezeichnen.

Hydrobufotalin und Bufotalon gaben nun bei der Analyse in steter Übereinstimmung Werte, die zu dem Bufotalin $C_{16}H_{24}O_4$ nicht in Beziehung gebracht werden konnten. Die analytische Nachprüfung der Substanz bestätigte aber diese Zusammensetzung, und das gleiche ergab sich für ihren wichtigen Abkömmling, das Bufotaliën, an dessen Formel $C_{16}H_{20}O_2$ mit den Mitteln der Analyse nicht zu rütteln war.

Angesichts dieser Unstimmigkeiten erhob sich der Verdacht, das Bufotalin könne ein isomorphes Gemisch zweier Stoffe sein, dessen einer Bestandteil in den Produkten der Hydrierung und Oxydation, dessen anderer als Anhydroprodukt (Bufotaliën) auftrete.

Als bei Abtrennungsversuchen das Präparat einmal aus Essigester umkrystallisiert wurde, stieg nun der Schmelzpunkt von 148° auf 156°, um aber dann bei Benützung des früheren Lösungsmittels (Alkohol) wieder auf 148° zu fallen. Aus dieser Beobachtung ging hervor, daß das Bufotalin zwar als Substanz einheitlich war, daß es aber mit Lösungsmitteln feste Verbindungen von verschiedenem Schmelzpunkt eingeht, die erst weit über dessen Siedepunkt das Lösungsmittel wieder abgeben. Ganz ähnliche Verhältnisse habe ich, gemeinsam mit Sorge, vor mehreren Jahren bei einem Stoff aus einer verwandten Gruppe, bei der Desoxycholsäure angetroffen[2]). Die beiden festgebundenen Lösungsmittel Alkohol und Essigester werden

[1]) Willstätter und Mayer, Ber. d. deutschen chem. Ges. 41, 2199 (1908).
[2]) Hoppe-Seyler, Zeitschr. f. physiol. Chem. 97, 1 (1916).

beim Erhitzen des Bufotalins auf 100° im Hochvacuum noch nicht abgegeben. Es war notwendig, die Substanz längere Zeit unter diesen Bedingungen auf 150° zu halten, um dies vollständig zu erreichen. Auf Grund quantitativer Bestimmungen hat sich das Bufotalin mit ca. 10 % Alkohol und ebensoviel Essigester vereinigt. Die davon befreite Substanz schmilzt bei 222° und läßt sich im Hochvacuum zu prächtigen Krystallen sublimieren.

Dem von Lösungsmittel freien Bufotalin kommt naturgemäß eine andere Zusammensetzung zu, als wie sie vor der Erkenntnis seines irreführenden Verhaltens ermittelt worden war. Auch die Molekulargröße wurde, im Einklang damit, erheblich höher, nämlich bei 416 i. D. gefunden. Jetzt eröffneten sich Beziehungen zum Hydrobufotalin und Bufotalon auf Grund der Formel $C_{26}H_{36}O_6$, der auch die Molekulargewichtsbestimmung gehorcht (Mol.-Gew. 444). Hydrobufotalin, davon abgeleitet, ist die Tetrahydroverbindung $C_{26}H_{40}O_6$. Bufotalin hat also zwei Doppelbindungen. Bufotalon ist das Keton $C_{26}H_{34}O_6$. Die früher für reines Bufotalin gehaltene Alkoholverbindung ist die Kombination von 1 Mol Bufotalin $C_{26}H_{36}O_6$ und 1 Mol Alkohol, die, wie gefunden, 10 % Alkohol enthält. Ihre Zusammensetzung entspricht genau den früheren Analysenwerten und dem früher gefundenen Molekulargewicht.

Bei der Einwirkung von Essigsäureanhydrid auf Bufotalin haben Wieland und Weil ein schön krystallisiertes Reaktionsprodukt erhalten, das sie nur durch eine komplizierte Deutung in den Bereich der damaligen Auffassung einbeziehen konnten. Sie gaben ihm die Konstitution eines Diacetylbufotalinäthers $C_{36}H_{50}O_9$ und mußten dabei annehmen, daß nach der Acetylierung zwischen zwei Molekülen Wasser abgespalten worden sei. Diese Verbindung ist jetzt eindeutig als Acetylbufotalin $C_{28}H_{38}O_7$ erkannt. Bufotalin ist ein Lakton. Durch Alkalien wird es langsam zu einer Säure aufgespalten, der sogenannten Bufotalsäure. Sie ist auch jetzt nicht in krystallisiertem Zustand erhalten worden, aber zwei Analysen, die Weil mit dem Rohprodukt ausgeführt hat, stimmen befriedigend auf die neue Zusammensetzung $C_{26}H_{38}O_7$.

Die besprochenen Umsetzungen und Beziehungen stehen in vollem Einklang mit der neuen Formel des Bufotalins. Nicht aber fügt sich ihr das durch konzentrierte Salzsäure aus ihm hervorgehende wichtige Derivat Bufotaliën, dessen Zusammensetzung $C_{16}H_{20}O_2$, wie erwähnt, bestätigt wurde, und bei dem der geringe Sauerstoffgehalt keine Variation über das Verhältnis $C_8H_{10}O$ hinaus zuläßt. Die Bestimmung des Molekulargewichts weist auf den dreifachen Wert dieser Einheit, auf die Formel $C_{24}H_{30}O_3$. Sie unterscheidet sich von der des Bufotalins $C_{26}H_{36}O_6$ um den Betrag $C_2H_6O_3$, also nicht wie bei der früher angenommenen Beziehung $C_{16}H_{24}O_4 \longrightarrow C_{16}H_{20}O_2$ um 2 Mol. Wasser. Es ist möglich gewesen, auch diese Reaktion aufzuklären und die durch die Wirkung der Salzsäure weggenommene Masse $C_2H_6O_3$ in 1 Mol. Essigsäure und 1 Mol. Wasser aufzulösen. Wenn man nämlich Bufotalin längere Zeit mit Alkalien erhitzt, so wird aus ihm Essigsäure abgespalten; Bufotalin enthält daher eine Essigestergruppe.

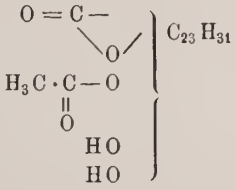
Der Verlust von je einem Mol. Essigsäure und Wasser zieht die Bildung zweier Kohlenstoffdoppelbindungen nach sich. Das intensiv gelbe Bufotaliën ist demgemäß vierfach ungesättigt. Bei der katalytischen Hydrierung nimmt es 4 Mol. Wasserstoff auf; das Perhydrierungsprodukt $C_{24}H_{38}O_3$ hat den Namen Bufotalan erhalten.

Bufotaliën läßt sich, wie schon Wieland und Weil festgestellt haben, zu einem prachtvollen orangegelben Körper acetylieren, der auch bei der Einwirkung von konzentrierter Salzsäure auf Acetylbufotalin entsteht.

Zur Konstitution des Bufotalins.

Wenn auch von einer völligen Klarstellung der Konstitutionsfrage im jetzigen Stadium der Untersuchung noch nicht die Rede sein kann, so erlauben die vorliegenden Ergebnisse doch schon recht weitgehende Schlüsse in jener Richtung zu ziehen. Fürs erste sind Natur und Charakter der sechs Sauerstoffatome des Moleküls scharf erkannt.

Zwei Sauerstoffatome gehören der Laktongruppe, zwei weitere der Essigestergruppe an. Die Oxydation zum Bufotalon weist auf ein sekundäres alkoholisches Hydroxyl, dem der fünfte Sauerstoff angehört. Endlich muß noch eine zweite Hydroxylgruppe vorhanden sein, die von der Acetylierung betroffen wird. Sie ist tertiär, denn auch ein Überschuß von Chromsäure oxydiert das Bufotalin nicht weiter als bis zum Bufotalon. Diese zweite, tertiäre Hydroxylgruppe ist im Bufotaliën noch vorhanden und definiert das dritte neben der Laktongruppe noch darin enthaltene Sauerstoffatom. Daß sie identisch ist mit dem im Bufotalin acetylierten Hydroxyl, geht daraus hervor, daß Acetylbufotalin unter Abspaltung von Essigsäure und Wasser sich zu Acetylbufotaliën umwandelt. Siehe S. 332. Das nachstehende Schema gibt die Erschließung der sechs Sauerstoffatome wieder

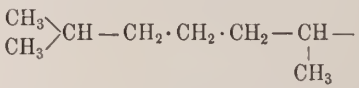


Die weitere Folgerung, die sich aus dieser Erkenntnis ziehen läßt, betrifft die Anzahl der Ringsysteme im Bufotalin-Molekül. Der gesättigte aliphatische Kohlenwasserstoff mit 26 C-Atomen ist $C_{26}H_{54}$. Dem Bufotalin $C_{26}H_{36}O_6$ gehört der Kohlenwasserstoff $C_{26}H_{42}$ an; er ist doppelt ungesättigt und geht unter Aufnahme der zur Sättigung erforderlichen zwei Mol. Wasserstoff in den Kohlenwasserstoff $C_{26}H_{46}$ über. Gegenüber der offenen Kette fehlen also 4 Mol. Wasserstoff, die durch vier Ringschlüsse ersetzt sein müssen.

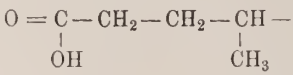
Es ist oben nachgewiesen worden, daß das Bufotalin eine acetylierte Alkoholgruppe enthält, und durch Abspaltung der Acetoxylgruppe sind wir beim Übergang zum Bufotaliën in die Gruppe C_{24} gekommen, in der wir das Grundgerüst des Moleküls anzunehmen haben.

Die Gruppe C_{24} mit vier Ringsystemen ist aber die der Gallensäuren. Der ganze chemische Habitus des Bufotalins und seiner Derivate stellt es außer Zweifel, daß in ihm ein Glied dieser biologisch wichtigen Klasse vorliegt. Die einfachste Verbindung, zu der wir gelangt sind, ist das Bufotalan $C_{24}H_{38}O_3$. Als Lakton gehört ihm die Oxysäure $C_{24}H_{40}O_4$ an, die mit der Desoxycholsäure isomer und gleich dieser als eine Dioxycholansäure aufzufassen ist.

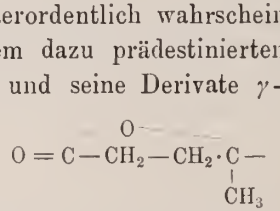
Wir können noch einen Schritt weiter gehen. Windaus[1]) hat im letzten Jahr den ungemein wichtigen Nachweis geführt, daß die Gallensäuren aus der Oxydation des Cholesterins hervorgehen, daß dieser Alkohol $C_{27}H_{45}OH$ unter Verlust einer Isopropylgruppe $(CH_3)_2 \cdot CH —$ auf den Carboxyl-führenden Komplex C_{24} abgebaut wird. Die Isopropylgruppe steht im Cholesterin am Ende einer Kette, deren Struktur ebenfalls durch die Arbeiten von Windaus aufgeklärt ist. Sie entspricht der nachstehenden Gliederung



und enthüllt auf Grund des erwähnten Abbaus gleichzeitig den Stand der Carboxylgruppe in den Gallensäuren gemäß dem Formelbild



Es ist nun außerordentlich wahrscheinlich, daß die Laktonisierung an diesem dazu prädestinierten Komplex einsetzt, daß also Bufotalin und seine Derivate γ-Laktone der Form



sind. Anders als bei der Bildung der Gallensäuren aus Cholesterin, wobei nur in die Ringe Hydroxylgruppen eingeführt

[1]) Ber. d. deutschen chem. Ges. 52, 1915 (1919).

werden, wird vermutlich im Organismus der Kröte auch die Seitenkette von der Hydroxylierung betroffen. Die Laktongruppe trägt die typische Giftwirkung des Bufotalins; sie ist bei der Bufotalsäure nicht mehr vorhanden.

Über die Stellung der beiden freien und der acetylierten Hydroxylgruppe läßt sich vorläufig nichts weiter aussagen, als daß sie von Ringen getragen werden. Dort liegen auch die beiden Doppelbindungen, und zwar in Nachbarschaft zu Acetoxyl und sekundärem Hydroxyl. Denn das vierfach ungesättigte Bufotaliën, dem sonst jedes Chromogen fehlt, kann seine intensiv gelbe Farbe nur der koordinierten Lage seiner vier Doppelbindungen verdanken. Aus der Leichtigkeit, mit der sich Bufotaliën perhydrieren läßt, ergibt sich weiter, — dies schließt die Eigenfarbe schon aus, — daß in ihm kein aromatischer Ring enthalten ist. Mit der Annahme der Nachbarschaft von Doppelbindungen und sekundärer Hydroxylgruppe im Bufotalin deckt sich aufs beste der Umstand, daß auch Bufotalon deutlich gefärbt ist; es dürfte daher die Gruppe $O=C-C=C-C=C-$ führen.

Der Weg, auf dem die vorläufig noch hypothetischen Beziehungen des Krötengifts zu den Gallensäuren und damit zum Cholesterin, die von erheblichem biologischen Interesse sind, scharf bewiesen werden können, liegt klar zu Tage. Es handelt sich um die durch bewährte Methoden gesicherte Überführung des Bufotalans $C_{24}H_{38}O_3$ in Cholansäure $C_{24}H_{40}O_2$, die Stammsubstanz der Gallensäuren. Die Materialfrage wird für die Lösung des Problems entscheidend sein.

Bufotalin und Bufagin.

Fast zu gleicher Zeit mit der Entdeckung des krystallisierten Bufotalins haben J. J. Abel und D. J. Macht den Giftstoff der tropischen Kröte Bufo agua beschrieben[1]), den sie aus dem Hautdrüsensekret zu isolieren vermochten und den sie Bufagin nannten. Bufagin schmilzt bei 217°, also nur

[1]) Journ. of Pharmakology and Exp. Therap. 1912, S. 319.

wenige Grade tiefer als das lösungsmittelfreie Bufotalin; seine Analyse führte die amerikanischen Autoren zu der Formel $C_{18}H_{24}O_4$, die sich in den Verhältnissen ihrer Bestandteile auch nicht allzu sehr vom Bufotalin $C_{26}H_{36}O_6$ unterscheidet (für Kohlenstoff 71,0 %, für Wasserstoff 7,95 % gegen 70,2 % und 8,2 %). Trotz dieser Annäherung im Schmelzpunkt und in der Zusammensetzung sind die beiden Giftstoffe sicher nicht identisch, sondern zweifellos verschieden. Das geht schon aus der Tatsache hervor, daß Bufagin nicht mit Lösungsmitteln krystallisiert, eine so charakteristische Eigenschaft des Bufotalins, daß sie von Abel und Macht unmöglich hätte übersehen werden können. Ferner sind die Löslichkeitsverhältnisse zwischen den beiden Stoffen deutlich verschieden. Bufagin ist in sehr verdünntem Alkohol weit schwerer löslich als Bufotalin, und die Krystallisationsmethode, nach der es umkrystallisiert wird, läßt sich beim Bufotalin nicht anwenden. Dann ist auch die Farbreaktion mit Essigsäureanhydrid und konzentrierter Schwefelsäure für die beiden Substanzen nicht gleichartig. Bufagin gibt sofort eine rein grüne Färbung, während beim Bufotalin in prachtvollem Farbenspiel die Töne rot violett und blau durchlaufen werden, denen erst nach einiger Zeit die Einstellung auf grün folgt.

Die spezifische Drehung beträgt beim Bufagin $+ 11^0$, beim Bufotalin $+ 6^0$.

Schließlich unterscheiden sich die beiden Gifte sehr erheblich im Grade ihrer Giftigkeit. Beide sind Herzgifte und wirken nach Art der Digitalis-glucoside. Aber die Giftigkeit von Bufotalin ist nach der Untersuchung des Herrn Kollegen E. St. Faust-Würzburg am isolierten Froschherzen eine zehnmal größere als beim Bufagin.

Abel und Macht glauben zwar durch Molekulargewichtsbestimmungen die von ihnen aufgestellte Formel $C_{18}H_{24}O_4$ für das Bufagin gesichert zu haben. Aber die von ihnen angewandten Methoden finden nicht unser volles Vertrauen. Es erscheint dringend geboten, das Molekulargewicht auf kryoskopischem Wege, z. B. in Eisessig, zu kontrollieren. Wir ver-

muten, daß es erheblich höher gefunden wird. Denn Bufagin muß, allen seinen Eigenschaften und seiner Herkunft nach, nahe mit Bufotalin verwandt sein. In der Zusammensetzung stimmt es auf die Formel $C_{27}H_{38}O_6$, und es besteht begründeter Anlaß zu der Vermutung, daß in ihm der Methyläther des Bufotalins vorliegt.

So ist der Stoffwechsel der tropischen und unserer einheimischen Kröte hinsichtlich der Produktion des Giftstoffs deutlich verschieden. Ein noch viel größerer Unterschied besteht darin, daß nach den Feststellungen von Abel und Macht Bufo agua im Hautdrüsensekret ganz gewaltige Mengen von Adrenalin ausscheidet (beinahe 7 % des frischen Sekrets), während dieser Bestandteil in den Hautdrüsen unserer Kröte auch nicht in Spuren sich findet. Wir haben dies neuerdings mit aller Bestimmtheit festgestellt, und unser Befund wird durch eine vor kurzem erschienene Arbeit von Handovsky[1]) bestätigt.

Über Bufotalidin.

Schon bei der ersten Bearbeitung des Gebiets habe ich gemeinsam mit F. J. Weil neben dem Bufotalin einen zweiten Giftstoff aus den Hautdrüsen der Kröte in krystallisiertem Zustand isoliert, der damals Bufotalëin genannt wurde. Ich gebe ihm die markantere Bezeichnung Bufotalidin. Bufotalidin krystallisiert aus den wässerigen Mutterlaugen von der Bufotalindarstellung in großen schönen Tafeln aus. Es teilt die Eigenschaft des Bufotalins, mit Lösungsmitteln zu krystallisieren. Die mit Alkohol verbundene Substanz schmilzt unter Aufschäumen bei 175°, wenn der Alkohol im Hochvacuum entfernt ist, liegt der Schmelzpunkt bei 228—230°. Die Farbreaktion ist ähnlich der des Bufotalins, jedoch verläuft der Wechsel der Farben viel rascher. Gegen Permanganat verhält sich Bufotalidin ungesättigter als Bufotalin. Mit konzentrierter Salzsäure reagiert es gleich diesem. Die Analysen des noch nicht näher untersuchten Stoffes stimmen mit der Formel $C_{26}H_{36}O_7$ überein. Darnach wäre Bufotalidin als Oxybufotalin anzusehen.

[1]) Arch. f. exp. Path. u. Pharm., Bd. 86, 138 (1920).

Experimenteller Teil.

Bufotalin $C_{26}H_{36}O_6$.

Die Isolierung aus Krötenhäuten und die Reindarstellung der Substanz geschah nach dem schon mitgeteilten Verfahren. Das aus Alkohol mehrfach umkrystallisierte Bufotalin schmolz im Einklang mit den früheren Angaben bei 148° unter Aufschäumen. Erhitzt man weiter, so wird der Inhalt des Röhrchens wieder fest, um dann gegen 220° erneut unter schwacher Blasenbildung zu schmelzen. Die im Exsiccator zur Konstanz getrocknete Substanz verliert, im Hochvacuum längere Zeit auf 150° erhitzt, ziemlich genau 10 % an Gewicht; es ist daher 1 Mol. Alkohol an ein Mol. Bufotalin gebunden. Wenn man vorsichtig im Hochvacuum auf 225°—230° erhitzt, so gelingt es, das Bufotalin bei dieser Temperatur zu sublimieren. Die mit einem Stern bezeichnete Analyse ist mit einem sublimierten Präparat ausgeführt. Besonders schön krystallisiert Bufotalin aus Essigester. Der Schmelzpunkt liegt jetzt bei 154°, unter den gleichen Erscheinungen, die die Alkoholverbindung zeigt. Unter den gleichen Bedingungen wie der Alkohol wird auch der angelagerte Essigester entfernt, die Gewichtsabnahme ist ebenso groß wie dort. Daraus ergibt sich, daß 1 Mol. Essigester sich mit 2 Mol. Bufotalin vereinigt hat. Die Zusammensetzung des Bufotalins haben wir durch zahlreiche Analysen besonders scharf festgelegt; die zwei ersten sind Makroanalysen, die übrigen sind nach der trefflichen Mikromethode von Pregl ausgeführt.

0,1531	g	gaben	0,3939	g	CO_2	und	0,1150	g H_2O
0,1509	„	„	0,3874	„	„	„	0,1109	„ „
7,172	mg	„	18,536	mg	„	„	5,367	mg „
7,303	„	„	18,854	„	„	„	5,273	„ „
5,807*	„	„	15,004	„	„	„	4,131	„ „
5,211	„	„	13,479	„	„	„	3,792	„ „
4,801	„	„	12,395	„	„	„	3,475	„ „

Für $C_{26}H_{36}O_6$, Ber. C 70,22 %, H 8,17 %.
Gef. C 70,17, 70,02, 70,49, 70,42, 70,43, 70,54, 70,41,
„ H 8,40, 8,22, 8,37, 8,08, 7,96, 8,14, 8,10.
Molekulargewicht. Lösungsmittel Eisessig. Konst. = 39.
0,2076 g in 15,546 g gaben eine Depression von 0,130°.
0,1938 „ „ 14,444 „ „ „ „ „ 0,121°.
Molekulargewicht für $C_{26}H_{36}O_6$ ber. 444, gef. 401 und 431.

Nachweis der Acetylgruppe im Bufotalin.

0,2 g Bufotalin wurden in 15 ccm n-methyl-alkoholischem Kali eine Stunde lang auf dem Wasserbad gekocht. Nach dem Verdünnen mit Wasser säuerte man vorsichtig an, bis Congopapier eben wahrnehmbar violett gefärbt wurde, filtrierte von der ausgeschiedenen Bufotalsäure ab und destillierte dann die Flüssigkeit aus dem Ölbad ab. Das Destillat reagierte bis zum letzten Tropfen auf Lakmus sauer und verbrauchte zur Neutralisation gegen Phenolphtalein 2,5 ccm n/10 Kalilauge. Auf Essigsäure umgerechnet entspricht dies 56 % der theoretisch zu erwartenden Menge. Der nach dem Abdampfen der neutralisierten Lösung hinterbleibende Salzrückstand wurde einwandfrei als Kaliumacetat erkannt durch die Bildung von Essigester, durch die Kakodylreaktion und durch den beim Ansäuern auftretenden unverkennbaren Geruch der Essigsäure.

Acetylbufotalin $C_{28}H_{38}O_7$.

Die früher als Diacetylbufotalinäther beschriebene Substanz schmilzt nach sorgfältiger Reinigung bei 254° unter gelindem Schäumen, entsprechend der Angabe von Wieland und Weil. Beim Trocknen im Hochvacuum bei 160° wurde eine Gewichtsabnahme um 1,5 % festgestellt, ohne daß der Schmelzpunkt sich änderte.

Die Analyse gab ähnliche Werte, wie sie früher gefunden worden sind.

5,267 mg gaben 13,358 mg CO_2 und 3,870 mg H_2O.
Für $C_{28}H_{38}O_7$ ber. C 69,09 %, H 7,88 %,
gef. „ 69,17 „ „ 8,22 „

Wenn man berücksichtigt, daß die früheren, aus Alkohol umkrystallisierten Präparate nicht im Hochvacuum getrocknet waren, also noch 1,5 % Alkohol enthalten haben, so stimmt das von Weil gefundene Molekulargewicht von 421 gut mit dem berechneten von 486 überein.

Hydrobufotalin $C_{26}H_{40}O_6$.

1 g Bufotalin wird in 10 ccm Alkohol gelöst und mit 0,5 g Palladiumschwarz unter Wasserstoff geschüttelt. Die anfangs recht lebhafte Wasserstoffaufnahme ist gewöhnlich bereits nach 3 Stunden zum Stillstand gekommen. Sie macht durchschnittlich 140 ccm aus, wovon etwa 40 ccm auf Rechnung des Palladiums zu setzen sind, so daß rund 100 ccm an das Bufotalin angelagert werden. Soviel berechnet sich für die Aufnahme von 2 H_2 durch ein Mol. Bufotalin. Die vom Palladium abfiltrierte Lösung überläßt man in einer offenen Schale der freiwilligen Verdunstung. Der krystallinische Rückstand wird mehrmals mit Äther verrieben und kann dann aus Alkohol umkrystallisiert werden. Nach mehrmaliger Krystallisation bleibt der Schmelzpunkt bei 204—205° stehen; das Schmelzen ist von schwachem Aufschäumen begleitet. Hydrobufotalin krystallisiert aus Alkohol in gedrungenen Prismen, die teilweise zu schräg gerichteten Kreuzen zusammengelagert sind. Im Gegensatz zum Bufotalin ist die Hydroverbindung auch in Eisessig gegen Permanganat einige Zeit stabil. Die Laktongruppe ist noch erhalten, alkoholisches Kali spaltet zur Säure auf. Die Farbreaktion mit Essigsäureanhydrid und konzentrierter Schwefelsäure geht von kirschrot über blau und grün rasch in ein bleibendes Hellbraun über.

Die bei 160° im Hochvacuum getrocknete Substanz erfuhr keine Gewichtsverminderung.

0,1306 g gaben 0,3312 g CO_2 und 0,1058 g H_2O.
0,1554 „ „ 0,3958 „ „ „ 0,1274 „ „
6,426 mg „ 16,449 mg „ „ 5,236 mg „
4,436 „ „ 11,352 „ „ „ 3,620 „ „
5,135 „ „ 13,062 „ „ „ 4,226 „ „

Für $C_{26}H_{40}O_6$ ber. C 69,59 %, H 8,99 %,
gef. „ 69,17, 69,46, 69,81, 69,79, 69,38.
„ H 9,07, 9,17, 9,12, 9,13, 9,21.

Bufotalon $C_{26}H_{34}O_6$.

0,2 g Bufotalin werden, in 2,5 ccm Eisessig gelöst, mit der Lösung von 0,1 g Chromtrioxyd in einigen Tropfen Wasser versetzt. Dabei steigt die Temperatur um etwas mehr als 5°. Zunächst scheidet sich eine flockige dunkelbraune Masse ab, die aber bald wieder in Lösung geht. Nach mehrstündigem Stehen des Gemischs entfärbt man die noch überschüssiges Chromtrioxyd enthaltende Lösung mit einigen Tropfen schwefliger Säure und bringt dann im Vacuumexsiccator über Schwefelsäure und Ätzkali zur Trockene. Durch Extraktion mit Äther wird dem pulverisierten Rückstand das Bufotalon entzogen. Zur Reinigung krystallisiert man aus Alkohol um, in dem das Keton in der Kälte ziemlich schwer löslich ist; auch in Essigester ist die Löslichkeit geringer als wie beim Bufotalin. Bufotalon krystallisiert in schwach gelben rhomboedrischen Blättchen. Sein Schmelzpunkt liegt bei 261°. Das Schmelzen zu einer braungelben Flüssigkeit erfolgt unter gelindem Schäumen.

Analysen.

5,174 mg gaben 13,367 mg CO_2 und 3,630 mg H_2O
5,922 „ „ 15,271 „ „ „ 4,104 „ „
5,852 „ „ 15,146 „ „ „ 4,206 „ „
6,198 „ „ 15,947 „ „ „ 4,348 „ „

Für $C_{26}H_{34}O_6$ ber. C 70,54 %, H 7,75 %,
gef. „ 70,46, 70,33, 70,59, 70,17,
„ H 7,85, 7,76, 8,04, 7,84.

Die Farbreaktion des Bufotalons mit Essigsäureanhydrid und konzentrierter Schwefelsäure nach Liebermann zeigt das gleiche prächtige Farbenspiel wie beim Bufotalin.

Durch alkoholisches Kali wird Bufotalon wie alle Bufotalinderivate zum Kaliumsalz der Oxysäure aufgespalten, das

schön orangegelb gefärbt ist. Hier ist es gelungen, die Säure durch Krystallisation aus Alkohol in hellgelben rhomboedrischen Blättchen rein zu erhalten. Sie schmilzt bei 235° und gibt mit Essigsäureanhydrid und konzentrierter Schwefelsäure anfangs eine grün fluorescierende Rosafärbung, die nach einer Viertelstunde in ein tiefes Olivgrün übergeht. Materialmangel hat nicht erlaubt, die Zusammensetzung dieser Säure analytisch sicher festzulegen.

Bufotalien $C_{24}H_{30}O_3$.

Bei ihrer Bedeutung für die Konstitutionsfrage haben wir auf die Reindarstellung dieser Substanz ganz besondere Sorgfalt verwandt. Dreimaliges Umkrystallisieren aus Alkohol erhöhte den Schmelzpunkt auf 222—223°, während er früher zu 219° gefunden wurde. Im Hochvacuum bei 160° verlor das Präparat nur 1 % an Gewicht. Die Analysen bestätigen die früher festgestellte Zusammensetzung.

6,861 mg gaben 19,795 mg CO_2 und 5,104 mg H_2O,
4,992 „ „ 14,416 „ „ „ 3,720 „ „
4,283 „ „ 12,355 „ „ „ 3,182 „ „

Für $C_{24}H_{30}O_3$ ber. C 78,64 %, H 8,26 %,
gef. „ 78,69, 78,76, 78,66,
„ H 8,32, 8,34, 8,31.

Molekulargewichtsbestimmung.

0,0842 g in 14,789 g Eisessig verursachten eine Gefrierpunkts-Depression um 0,067°.

Mol.-Gew. für $C_{24}H_{30}O_3$ ber. 366, gef. 331.

Bufotalan $C_{24}H_{38}O_3$.

0,35 g Bufotalien wurden, in 15 ccm Alkohol gelöst, mit 0,3 g Palladiumschwarz unter Wasserstoff geschüttelt. Es erfolgte lebhafte Wasserstoffaufnahme. Schon nach einer Viertelstunde war die anfangs gelbe Lösung entfärbt. Nach einer Stunde waren 115 ccm Wasserstoff absorbiert, davon etwa 25 ccm vom Palladium. 90 ccm sind daher vom Bufotalien aufgenommen, das mit 4 Mol. H_2 der Berechnung nach 85 ccm

verbraucht. Die abfiltrierte alkoholische Lösung hinterläßt nach dem Verdunsten des Lösungsmittels einen nicht krystallinischen Rückstand, der durch Ausziehen mit Äther in zwei Teile zerlegt wird. Das Bufotalan wird dabei vom Äther aufgenommen, bleibt aber nach dem Eindunsten der Lösung auch noch ölig zurück. Man reibt nun diesen Rückstand des öfteren mit niedrig siedendem Petroläther durch und nimmt das ungelöst Gebliebene, die Hauptmenge, abermals in Äther auf. Beim langsamen Verdunsten, am besten im offenen Reagensglas, hinterläßt diese Lösung farblose Krystalle, die bei 185 bis 190° schmelzen. Sie werden zur Reinigung in ziemlich viel Alkohol gelöst, und in der Siedehitze fügt man zu dieser Lösung etwa 8 Tropfen Wasser, worauf beim Erkalten das Bufotalan in feinen, zu Büscheln gruppierten Nadeln herauskommt. Die so gereinigte Substanz schmilzt bei 198—199°, von 196° ab erweichend. Im Hochvacuum bei 110° trat kein Gewichtsverlust ein.

Analysen.

4,696 mg gaben 13,249 mg CO_2 und 4,360 mg H_2O,
3,952 „ „ 11,089 „ „ „ 3,458 „ „
Für $C_{24}H_{38}O_3$ ber. C 76,94%, H 10,23,
gef. „ 76,95, 76,53, H 10,25, 9,79.

Beim Bufotalan tritt die Liebermannsche Farbreaktion nicht mehr auf.

Zur Beschaffung des Materials stand eine Zuwendung aus den Zinsen der A. v. Baeyer-Stiftung zur Verfügung.

Mitteilungen über Wirbeltierreste aus dem Mittelpliocän des Natrontales (Ägypten).

5. Nachtrag zu 1. Affen.

Von **Ernst Stromer.**

(Mit 1 Tafel.)

Vorgetragen in der Sitzung am 3. Juli 1920.

Der Fossilsammler R. Markgraf hat im Winter 1912 auf meine Anregung hin in den Sanden am Garet el Muluk weitere Nachgrabungen für die paläontologische Sammlung der Universität Freiburg i. B. gemacht. Die dabei gefundenen Affenreste hat mir Herr Prof. Deecke, der Vorstand dieser Sammlung, bereitwillig zur Bearbeitung überlassen, wofür ich ihm auch an dieser Stelle bestens danke. Ich kann mit Hilfe der allerdings sehr fragmentären Reste meine in der Zeitschr. d. D. geol. Ges., Bd. 65, 1913, S. 350 ff. veröffentlichte Beschreibung pliocäner Cynopithecidae in manchem ergänzen und berichtigen. Für reichliches rezentes Vergleichsmaterial aus der hiesigen zoologischen und anthropologischen Sammlung habe ich den Herren Professoren Dr. Martin und Leisewitz zu danken.

C. Aulaxinuus libycus nov. spec.

Taf. Fig. 1, 1 a.

Ein Bruchstück eines linken Unterkieferastes *C* mit stark abgekautem P_4, M_1 und M_2 und mäßig abgekautem M_3 paßt in Form und Größe sowie im Grade der Abkauung, allerdings nicht in der Farbe, so vollkommen zu dem von mir 1913, S. 357—359, Taf. 12, Fig. 2 a, 2 b von dem gleichen Fundorte

beschriebenen und abgebildeten linken Oberkiefer *B*, daß an einer Zugehörigkeit zur gleichen Art (nicht zu demselben Individuum) kein Zweifel sein kann.

Wie die Abbildung und die Maße auf Seite 356 zeigen, ist der P_4 ebenso wie der P^4, wenn auch wenig, breiter als lang. Dies spricht dafür, daß auch der P_3 nur kurz war, die *P*-Reihe also wie im Oberkiefer im Verhältnisse zur *M*-Reihe sehr kurz, ziemlich sicher bei einem Weibchen weniger als $^1/_2$ mal so lang als letztere. Der M_1 ist ebenso wie der M^1 wenig länger als breit, aber kürzer als er. Auch der M_2 ist ein wenig kürzer als der M^2 und wie er deutlich länger als breit, der M_3 aber ist infolge sehr starker Entwicklung seines Talons lang.

An dem M_2 und M_3 kann man sehen, daß die zwei Innenhöcker etwas von vorn und hinten komprimiert und daß sie durch ausgesprochene Querjoche mit den Außenhöckern verbunden sind; beides ist ein Merkmal der Semnopithecinae.

Der M_2 besitzt vorn und hinten ein Cingulum; der M_3 in den Eingängen des vorderen Quertales innen und außen ein Höckerchen, an seinem nicht schüsselförmigen Talon ist außer einem konischen hinteren Höcker ein kleiner innerer entwickelt.

Ein Vergleich des Unterkiefers mit dem des geologisch etwas jüngeren von Aulaxinuus florentinus Cocchi aus dem Oberpliocän Toskanas nach den Beschreibungen und Abbildungen von Cocchi 1872 und Ristori 1890 und nach einem in der Münchener paläontologischen Sammlung befindlichen Gipsabgüsse des Originals Cocchis zeigt nun in der Form wie in den Maßverhältnissen der Backenzähne eine recht gute Übereinstimmung. Da Cocchi und Ristori nur sehr wenige Maße angaben und die Figuren des ersteren darin ungenau sind, indem z. B. besonders die Prämolaren in seitlicher Ansicht kürzer sind als in oberer, habe ich in die Tabelle auf Seite 356 die Maße nach dem Gipsabgusse und Ristoris Figuren eingetragen. Sie zeigen, daß die italienische Form nur wenig größer ist als die vorliegende.

Der P_4 und M_1 ist allerdings nicht so auffällig kurz und der M^2 nach Ristoris Fig. 19 relativ länger als an meinem Oberkiefer B, nämlich 9,6 mm lang und etwa 8 breit. Bemerkenswert ist die Übereinstimmung in dem Bau und der Größe des Talons des M_3. Diesem fehlen allerdings die Höckerchen an den Eingängen des vorderen Quertales, aber derartige Gebilde sind höchst variabel, nach Ristori S. 28 sind dafür manchmal, wenigstens buccal an deren Stelle zwei kleine Furchen vorhanden. Die Querjoche sind auch an dem Gipsabgusse sehr gut zu sehen, die Innenhöcker allerdings sind kaum komprimiert.

Die Übereinstimmung bis auf letztgenanntes wichtiges Merkmal ist also so groß, daß nach den vorliegenden Resten nur ein Artunterschied anzunehmen ist, der ja bei dem verschiedenen geologischen Alter und der räumlichen Trennung von vornherein wahrscheinlich ist. Ich nenne die neue durch Ober- und Unterkiefer belegte Form daher Aulaxinuus libycus. Diese Art hat etwa die Größe des Magot, Inuus ecaudatus, sie zeichnet sich in der Backenzahn-Reihe vor allem durch die Kürze der P aus, hat an den oberen M etwas halbmondförmige Innenhöcker und etwas von vorn und hinten komprimierte Außenhöcker, an den unteren M ebensolche Innenhöcker und am M_3 einen starken Talon mit deutlichem Innenhöcker vor dem stärkeren hinteren Höcker.

Schwierig ist nun die Stellung der Gattung zu bestimmen, denn Ristori a. a. O. reihte sie sehr nahe an Inuus ecaudatus an, während Cocchi immerhin Unterschiede betont hatte, Gaudry 1891 aber wegen der Querjoche für eine Mittelstellung zwischen Semnopithecinae und Cynopithecinae eintrat und ich (1913, S. 358) den Oberkiefer B zu ersteren gerechnet habe. In der Tat hat der Magot nach zwei mir vorliegenden Schädeln von männlichen Inuus ecaudatus, Menagerie-Exemplaren der hiesigen zoologischen Sammlung, zu schließen, große Ähnlichkeit in den Zahnproportionen und im Talon des M_3 mit dem Unterkiefer des Aulaxinuus florentinus. Die neue Art aber steht Semnopithecinae zweifellos im Bau der M näher als jene Art, andererseits fand ich weder bei mehreren Mesopithecus

Pentelici der hiesigen paläontologischen Sammlung, noch bei Semnopithecus maurus und nasua oder zahlreichen Colobus einen so starken Talon des M_3 wie bei Aulaxinuus. Bei Colobus ist er allerdings nicht viel schwächer, und bei Colobus ferrugineus der hiesigen zoologischen Sammlung sogar mit der Andeutung eines inneren Randhöckers versehen. Semnopithecus palaeindicus Lyd. aus den oberen Siwalikschichten, also mit Aulaxinuus ungefähr gleichalterig, hat nach den Abbildungen in Falconer (1868, Taf. 24, Fig. 5—7) und Lydekker (1886, Taf. 1, Fig. 7) am M_3 ebenfalls einen verhältnismäßig großen Talon mit einem oder zwei inneren Höckerchen. Der P_4 ist hier aber viel länger und der Unterkiefer verhältnismäßig niedriger als bei Aulaxinuus. Semnopithecus monspessulanus Gervais endlich aus dem Mittelpliocän von Montpellier, also gleichalterig mit Aulaxinuus libycus, hat nach den von Mauche (1906, S. 137—148, Taf. 7, Fig. 1—14) an sehr versteckter Stelle beschriebenen und abgebildeten Unterkiefern am M_3 nur einen kleinen einfachen Talon und längere P als Aulaxinuus.

Auffällig sind vor allem die Maßverhältnisse der Backenzähne von Aulaxinuus. Schon 1913, S. 358—359 wies ich auf die für Semnopithecinae ungewöhnliche Kürze der Prämolarenreihe hin; bei Semnopithecinae ist auch nach meinen Messungen rezenter Gebisse der P_4 länger als breit, der M_1 so lang als der M^1 oder sogar ein wenig länger, der M_2 allerdings, wenigstens bei Colobus caudatus kürzer als der M^2.

Bei Cynopithecinae aber ist die P-Reihe öfters ähnlich kurz, bei Inuus ecaudatus allerdings deutlich länger als bei Aulaxinuus libycus und etwas länger als bei A. florentinus. Bei Inuus ecaudatus ist auch die Ausbildung der Querjoche der Backenzähne schwächer als bei Aulaxinuus; bei dem wohl diluvialen Oberkiefer von Inuus svevicus Hedinger aus Württemberg, der nach einem hiesigen Gipsabgusse ein wenig größer als bei Aulaxinuus libycus ist, sind gleichfalls die beiden oberen P und der M^1 länger als bei diesem im Verhältnis zur Länge der hinteren Molaren und die P auch in dem zu ihrer Breite, wie die Maße auf Seite 356 zeigen. Deshalb glaube ich, daß

die Gattung Aulaxinuus, deren Gebiß den Abstand zwischen Semnopithecinae und Cynopithecinae überbrückt, aufrecht zu erhalten ist; ich möchte sie aber eher den letzteren anreihen, was meiner früheren Ansicht bezüglich des Oberkiefers *B* widerspricht. Gut begründen läßt sich die Stellung der unvollständigen Reste nicht.

D. Libypithecus Markgrafi Stromer.

Taf. Fig. 4.

Ein Stückchen eines linken Oberkiefers *D* mit sehr gut erhaltenen und eben erst angekauten P^3, P^4 und M^1, woran nur die Außenwand des P^3 fehlt, dürfte zu der von mir 1913 aufgestellten Art gehören. Wie die Maße auf Seite 356 im Vergleich zu denen meines Originals (1913, S. 353) zeigen, ist allerdings der M^1 länger, die *P* ganz wenig kürzer, auch ist die Außenwand des P^4 nach außen konvexer als bei dem Original, ferner scheint der Jochbogenansatz hier über der hinteren Wurzel des M^1 auszulaufen, während er dort oberhalb des Vorderrandes des M^2, also weiter hinten beginnt und endlich hebt sich der Alveolarfortsatz stärker von der Gaumenplatte ab als dort. Die Backenzähne gleichen aber sonst so sehr denjenigen des Originalschädels, daß ich in den erwähnten Unterschieden nur eine Variabilität, vielleicht auch, speziell in der Kürze der *P*, Geschlechtsunterschiede sehen möchte.

E. Papio spec. indet.

Taf. Fig. 5, 5a.

Der unabgekaute M_1 und M_2 auf einem Stückchen eines linken Unterkieferastes *E* haben konische Höcker, wenn auch an den Innenhöckern ein Querjoch angedeutet ist. Nach den Maßen auf Seite 356 sind beide *M* deutlich länger als breit, der M_2 ist länger und breiter, auch höher als der M_1, auffällig schmal und vorn wie hinten mit einem stärkeren Cingulum versehen als der M_1. Bezeichnend für die Zugehörigkeit zu der rezenten Gattung Papio scheint mir zu sein, daß dieses buccalwärts an der Vorder- und Hinterseite der Außenhöcker

durch eine senkrechte Furche begrenzt wird, wobei ich die Gattung wie Elliot (1912, S. 115), nicht so weit wie Matschie (1900, S. 249—50) auffasse.

Zu Papio (Cynocephalus) atlanticus Thomas (1884) kann unser Rest wegen seiner viel geringeren Größe nicht gehören. Im übrigen ist diese Art ganz leichtfertig ohne Maße und Beschreibung auf einen vereinzelten unteren M_3 von 15 mm Länge aus dem Oberpliocän von Ain Jourdel in Algier aufgestellt und nur in seitlicher Ansicht abgebildet.

Von den zwei Papioarten des indischen Oberpliocäns unterscheidet sich P. (Cynocephalus) subhimalayanus H. v. Meyer, wenn auch nur in einem Oberkiefer bekannt (Falconer 1868, S. 298, Taf. 24, Fig. 1, 2; Lydekker 1885, S. 4—5; 1886, S. 6, Taf. 1, Fig. 3) durch seine viel erheblichere Größe von dem vorliegenden Stück. Der Unterkiefer von P. Falconeri Lydekker (1886, S. 7, Taf. 1, Fig. 4; Falconer 1868, S. 300—302, Taf. 24, Fig. 3, 4; Lydekker 1885, S. 6) aber zeigt in den Maßen des M_1 und M_2 ziemlich gute Übereinstimmung mit ihm, außer daß speziell der M_2 ein wenig länger ist; seine Zähne sind aber so stark abgekaut, daß sich ein näherer Vergleich leider nicht ermöglichen läßt. Die verhältnismäßig große Höhe des Unterkiefers läßt mir sogar fraglich erscheinen, ob ein Angehöriger der Gattung Papio vorliegt und jedenfalls war Falconers (1868, S. 302) und Lydekkers erste Stellungnahme (1885), keine Art auf einen derartigen Rest zu begründen, richtiger als Lydekkers spätere (1886).

Nach Anderson (1902, S. 28 ff.) leben gegenwärtig in Nordostafrika vier Papioarten (P. hamadryas L., anubis Fischer, cynocephalus L. und pruinosus Thomas), die aber nach den von ihm angegebenen Maßen der Zähne (S. 32, 40, 74 und 80) sämtlich zu groß sind, als daß der fossile Rest dazu gehören könnte. Nach Andersons Maßtabellen (l. c., S. 76—77) schwankt ja nur die Länge des M_3 in weiterem Umfange, wohl infolge größerer Variabilität in der Größe von dessen Talon.

Nach Elliot (II, 1912, S. 123) sind nun zwar die Papioarten Andersons irrig aufgefaßt, aber auch hier fand ich keinen

Anhalt für die Zugehörigkeit des fossilen Restes zu einer rezenten Art Nordostafrikas. Bei einem Männchen von Papio leucophaeus aus Victoria in Kamerun sind aber die M nur wenig größer als bei dem Stück E und die Proportionen dieselben. Einzelheiten in der Kronenform, z. B. die schärfere Trennung der zwei Außenhöcker bei E unterscheiden ihn aber auch von dieser Art.

Die abessynischen Therocephalus-Arten, noch stattlicher als die genannten Paviane, kommen ihrer Größe wegen nicht in Betracht, auch unterscheiden sich ihre unteren M dadurch, daß das hintere Cingulum fast zu einer Art von kleinem Talon vergrößert und lingual deutlich vom Innenhöcker abgesetzt ist, so daß Elliot (1912, S. 155) von fünfhöckerigen unteren Molaren spricht.

Eine neue Art auf den dürftigen, mir vorliegenden Rest aufzustellen, halte ich für ganz unstatthaft.

F. Symphysenstück.

Taf. Fig. 2, 2a.

Das Symphysenstück F enthält die wohl erhaltenen linken J_1 und J_2 und rechten J_1, C, P_3, P_4 und M_1, aber in mehr oder weniger stark abgekautem Zustande. Es gehörte einem Weibchen an von der Größe des Aulaxinuus libycus, wie die Maße der Zähne auf Seite 356 zeigen, denen noch die Kieferhöhe unter dem M_1 mit 20 mm, die Länge der Vorderfläche der Symphyse mit 28 mm und die Breite des Unterkiefers am P_3 mit etwa 22 mm anzufügen sind. Auffällig ist daran, daß die Schneidezähne stark nach vorn ragen und daß die Symphysen-Hinterseite wenig nach hinten geneigt ist, bis sie etwa in der Breite des Hinterrandes des P_3 fast senkrecht abfällt, während die Vorderseite ziemlich schräg nach hinten verläuft. Ein rezentes Cercopithecus cephus-Weibchen der hiesigen zoologischen Sammlung ist darin ähnlich, bei Inuus ecaudatus aber ragen die Schneidezähne weniger vor, die Hinterseite der Symphyse ist mehr nach hinten geneigt, und ihre Vorderseite steht

steiler, was die Regel bei Cynopithecidae ist. An dem Gipsabgusse des Originals von Aulaxinuus florentinus Cocchi endlich sind zwar die Schneidezähne und die Symphysen-Vorderseite in ihrer Neigung nicht sehr verschieden, die Hinterseite jedoch ist stärker rückgeneigt und schon in der Breite der C sehr steil gestellt, auch ist die Höhe des Astes unter dem M_1 erheblich größer, wobei allerdings zu beachten ist, daß es sich um ein männliches Tier handelt.

Von Aulaxinuus libycus unterscheidet die größere Länge und geringere Breite des P_4 und M_1, also etwas andere Proportionen der wenigen vergleichbaren Zähne und vor allem der P_4, der an dem Rest F außen hinten ähnlich wie bei Inuus ecaudatus verschmälert ist und außerdem oben eine besonders tiefe hintere Grube besitzt. Auch divergieren die Wurzeln des P_4 und M_1 nicht ganz so stark wie bei jenem.

Gegen die Zugehörigkeit zu Libypithecus Markgrafi, von dem leider unmittelbar vergleichbare Reste nicht bekannt sind, spricht die starke Vorneigung der I, die bei Anpassen an den Originalschädel, zu dem die Symphyse der Größe nach passen würde, zu weit vor die normalen oberen Schneidezähne kommen, und die Breite des P_4 und M_1, die größer ist als die der oberen Zähne, was dem normalen Verhalten widerspricht. Von Papio E unterscheiden sofort die völlig verschiedenen Proportionen des M_1.

Bei der starken Abkauung der Backenzähne läßt sich der Rest unter den jetzigen Umständen überhaupt nicht sicher bestimmen, am wahrscheinlichsten scheint mir noch eine Zugehörigkeit zu Aulaxinuus libycus, da die nachweisbaren Unterschiede kaum über die Variationsbreite hinausgehen dürften.

G. Oberer rechter M^2 (Aulaxinuus libycus Str.).

Taf. Fig. 3, 3a.

Mit etwas größerer Sicherheit läßt sich ein rechter oberer M, dessen Wurzeln abgebrochen sind, dessen wenig abgekaute Krone aber vorzüglich erhalten ist, zu Aulaxinuus libycus als M^2 stellen, wenn er auch ein wenig größer als an dem Ober-

kiefer *B* ist. Die Länge seiner Krone beträgt nämlich 10 mm, die Breite vorn 8,5, hinten 8 mm. Ein M^3 kann es nicht sein, weil der Schmelz vorn und hinten durch die Reibung angrenzender Zähne etwas abgeschliffen ist; für Libypithecus Markgrafi ist der Zahn zu groß und seine Form gleicht völlig dem in der Abkauung ungefähr ebenso weiten M^3 des Oberkiefers *B*.

H. Oberer linker M^2 (Papio? spec. indet.).

Taf. Fig. 6, 6a.

Ein linker mit den Wurzeln wohl erhaltener und nur etwas abgekauter oberer *M* zeigt wie der vorige vorn und hinten Abwetzspuren durch angrenzende Zähne und paßt in der Größe und der Form der Wurzeln gut an das oben besprochene Oberkieferstück *D* von Libypithecus Markgrafi, könnte also ein zugehöriger M^2 sein, wenn auch die dunklere Farbe eine individuelle Angehörigkeit ausschließt. Wie dessen M^1 ist der Zahn etwas groß gegenüber dem Original *A*, denn die Krone ist 8,9 mm lang und 7,5 breit. Fraglich wird seine Zugehörigkeit zu dieser Form aber vor allem dadurch, daß seine zwei Außenhöcker durch eine kleine Außenwand verbunden sind, daß keine Querjoche von ihnen ausgehen und daß die Labialseite der Innenhöcker weniger stark konvex ist, daß also auch die Innenhöcker nicht mesio-distal komprimiert sind, wie es bei Semnopithecinae der Fall ist. Zu Aulaxinuus libycus paßt er in Proportion und Form noch weniger. Eher könnte er ein M^1 oder M^2 eines Papio sein, um so mehr, als er in der Größe zu den oben beschriebenen unteren *M* von Papio *E* paßt. Ich finde allerdings bei Papio keine Außenwand und meistens ist der M^1 und stets der M^2 hier länger, bei einem P. leucophaeus ♂ von Victoria in Kamerun ist aber der M^1 in seinen Proportionen wie in seiner Form sehr ähnlich.

I. Unterer linker hinterster Milchmolar.

Taf. Fig. 8.

Der ziemlich stark abgekaute untere Backenzahn *I* ohne Wurzeln ist deutlich länger als breit, nämlich 7 mm lang und nur 5,8 breit. Die vier Höcker sind durch zwei Querjoche verbunden und hinten ist noch ein deutliches Cingulum vorhanden. Der Zahn, der bis auf letzteres in Größe und Form dem M_1 von Mesopithecus Pentelici gleicht und die Merkmale eines Backenzahnes eines Semnopithecinen besitzt, ist zu klein und besonders zu schmal für einen *M* von Aulaxinuus libycus oder von Libypithecus Markgrafi, könnte aber ein hinterster Milchmolar einer dieser zwei Formen sein.

K. Oberer linker vierter Prämolar.

Taf. Fig. 7.

Der mit ziemlich vollständigen Wurzeln vorzüglich erhaltene und wenig abgekaute Prämolar *K* zeigt ein deutliches Querjoch zwischen seinen zwei konischen Höckern und davor wie dahinter eine schüsselförmige Grube, von welcher die hintere deutlich größer und tiefer ist. Bemerkenswert ist seine Kürze und Breite mit 6 bezüglich 8 mm, die ihn nebst dem Querjoche von einem *P* von Papio unterscheidet, aber Aulaxinuus nähert. Für Aulaxinuus libycus wie für Libypithecus Markgrafi ist aber der Zahn zu groß, er gehörte einem Tiere von der Größe des Dolichopithecus ruscinensis an, kann jedoch wegen seiner Kürze auch zu dieser Form nicht gehören. In ihm ist also zum mindesten das Vorhandensein einer weiteren vierten Art von Affen im Mittelpliocän des Natrontales angezeigt.

L. Unterer linker dritter Molar.

Taf. Fig. 9, 9a.

Der abgesehen von den Wurzeln vorzüglich erhaltene und ganz unabgekaute Molar *L* zeichnet sich durch seine ungewöhnliche Länge von 10 mm im Verhältnis zu einer Breite von nur 6 mm aus. Er trägt ausgesprochen den Charakter

eines Semnopithecinen, denn die durch ein tiefes Quertal getrennten Querjoche sind scharf ausgeprägt, vorn ist nur ein schwaches Cingulum vorhanden und hinten ein recht kleiner schüsselförmiger Talon mit halbkreisförmigem scharfem Rande ohne Höcker, es ist also der hinterste Molar.

Zu Aulaxinuus paßt er in seinen Proportionen wie in seiner Form nicht, seine Länge macht auch nicht gerade wahrscheinlich, daß er zu Libypithecus Markgrafi gehört, mangels direkten Vergleichsmaterials läßt sich diese Frage auch kaum entscheiden. Eine einigermaßen sichere Bestimmung dieses wie der anderen vereinzelten Zähne ist eben nur ausnahmsweise möglich wie bei G.

Ergebnisse.

Zu stammesgeschichtlichen Folgerungen geben die beschriebenen unvollständigen Reste kaum Anlaß; bemerkenswert ist nur, daß ich mich der Ansicht anschließen muß, daß Aulaxinuus von Innus zu trennen ist und daß er im Gebiß den Abstand von Cynopithecinae und Semnopithecinae verringert[1]). Da auch Mesopithecus in seinem Skelett und Gebiß, Libypithecus in seinem Schädel und Gebiß eine Trennung beider Unterfamilien sehr erschwert, scheint sich diese erst in später Zeit, also im Jungtertiär herausgebildet und seitdem verschärft zu haben.

Ob Aulaxinuus der Vorfahre einer rezenten Gattung ist, läßt sich bei der geringen Kenntnis seines Skeletts nicht sagen, ebenso ist keine sichere Begründung der Vermutung möglich, daß Aulaxinuus libycus der Vorfahre des geologisch etwas jüngeren und wenig größeren A. florentinus ist. Der Papio kann bei seiner verhältnismäßig geringen Größe der Ahne einer oberpliocänen oder rezenten Art sein, weil Größenzunahme bei Stammreihen die Regel ist; mehr läßt sich aber

[1]) Die Angabe von Owen (1845, S. 443), daß die Semnopithecinae von den Cynopithecinae durch gleiche Größe des M^1 und M^2 und geringere vordere Breite des M^3 im Verhältnis zu seiner Länge sich unterscheiden, trifft nach meinen Messungen rezenter Semnopithecus-, Innus- und Colobusarten nicht zu, außer letzteres fast stets für den unteren M^3.

Masstabelle.

	Aulaxinuus libycus, untere Zähne *C*, Seite 345		Libypithecus Markgrafi, obere Zähne *D*, Seite 349		Papio sp. indet., untere Zähne *E*, Seite 349		cfr. Aulaxinuus libycus, untere Zähne *F*, Seite 351		Aulaxinuus florentinus						Inuus suevicus ♀ obere Zähne, Gipsabguss		Mesopithecus Pentelici			
									♂ untere Zähne, Gipsabguss		Risteri ♀ Fig. 35, 36		Risteri, Fig. 30				♂ obere Zähne in München		♂ untere Zähne Unterkiefer in München	
	lang	breit	lang	breit	lang	breit	lang	breit	lang	breit	lang	breit	lang	breit	lang	breit	lang	breit	lang	breit
I_1	—	—	—	—	—	—	4,1	5,5	—	—	3,5	—	—	—	—	—	4,9	4	3,1	4
I_2	—	—	—	—	—	—	3,9	4,9	3,5	5	3,2	—	—	—	—	—	4	4	3,1	4
C	—	—	—	—	—	—	6	3,5	10	—	—	—	—	—	—	—	9?	6?	7,5	4,5
$P+M$	—	—	—	—	—	—	—	—	44,5	—	43,2	—	—	—	38,5	—	31,5	—	38?	—
P-Reihe	—	—	10	—	—	—	13	—	15,5	—	13,5	—	—	—	12	—	9,8	—	12,2	—
M-Reihe	27	—	—	—	—	—	—	—	29	—	30	—	—	—	27	—	21,5	—	25?	—
Verhältnis $P:M$	—	—	—	—	—	—	—	—	1,87	—	2,22	—	—	—	2,25	—	2,19	—	2,05	—
P_3	—	—	5	—	—	—	7	4,2	9	5,5	6,9	4,5	—	—	6	6	5	5,3	6,5	4
P_4	5,1	5,5	5,3	6	—	—	6	6	6	5,5	6,6	5	6	—	6	7	5	6	5,5	4,8
M_1	6,9	6,5	8,1	6,5	8,5	6,5	7+7		8	6	8,5	6,5	8	—	9	8	7	6,1?	7,3	5,8
M_2	9,1	7,5	—	—	10	7,5	—	—	9,5	7,5	9,5	7	9,5	—	9,5	9?	7,8	7,1	8	6,8
M_3	12	8 7	—	—	—	—	—	—	12	7,9 7	12,2	7,5 7,1	12,2	—	9,5	—	6,8	7 6,9	9?	7,1 —

bei der Dürftigkeit des zugehörigen Restes nicht sagen. Da von den geologisch älteren Affen, abgesehen von Mesopithecus, ebenfalls nur recht unvollständige Reste bekannt sind, läßt sich auch über die Vorfahren der hier beschriebenen Formen nichts mit einiger Sicherheit begründen.

Von größerer Bedeutung sind die tiergeographischen Ergebnisse meiner Arbeit: Zunächst ist wichtig, daß nun mindestens drei Gattungen und vier Arten von Cynopithecidae im Mittelpliocän des Garet el Muluk im Natrontale nachgewiesen sind. Der Formenreichtum der Affen war also sicher ein erheblicher. Papio kann ein Bewohner von Felsen in einer Steppenlandschaft gewesen sein, die andern Affenreste dürften aber doch Waldbewohnern zuzurechnen sein. Vielleicht waren eben Galeriewälder dem Strom entlang vorhanden, der damals dort in das Mittelmeer mündete.

Daß die Gattung Papio (in Elliots Fassung 1912, S. 115 ff.) in Nordägypten, wenn auch nördlich von ihrem heutigen Wohngebiete Äthiopien, so doch in dem unmittelbar anschließenden Lande, das jetzt zum Mittelmeergebiete gehört, schon im Mittelpliocän fossil nachgewiesen ist, erscheint nicht verwunderlich, ist aber doch bemerkenswert. Bei der Seltenheit von Funden fossiler Affenreste und dem Zufall, der hier natürlich besonders mitspielt, erscheint mir jedoch gewagt, aus der Tatsache tiergeographische Schlüsse zu ziehen, daß die eine Gattung Libypithecus nur in Ägypten und nicht auch im Pliocän Asiens und Europas nachgewiesen ist und Papio nicht im Pliocän Europas. Wichtiger ist deshalb der andere positive und daher einwandfreie Befund, daß die Gattung Aulaxinuus im Pliocän Italiens und Ägyptens, und Papio im Pliocän Vorderindiens und Nordafrikas vorkommt. Daß sie außerhalb Afrikas nur in etwas jüngeren pliocänen Schichten gefunden sind, kann man so deuten, daß ihre Heimat Afrika ist und daß sie erst im jüngeren Pliocän bis nach Südeuropa und Südasien gelangten. Dies würde allerdings mit der Annahme, der ich mich (1913, S. 360) als wahrscheinlich anschloß, daß Afrika die Heimat der Cynopithecidae sei, gut übereinstimmen, gesichert erscheint der

Schluß aber aus den eben berührten Gründen nicht. Jedenfalls ist ja daran zu erinnern, daß im Unterpliocän Europas und im Pliocän Vorderindiens mehrere Cynopithecidae, darunter die zuerst (1836—37) gefundenen Affenreste überhaupt, nachgewiesen sind.

Erst neuerdings hat Pilgrim (1915) von Hasnot im Pandschab aus der Dhok Pathanzone, also aus der Mittelsiwalikstufe, die er mit Recht zu der (unterpliocänen) pontischen Stufe stellt, einige wenn auch sehr dürftige Gebißreste von Cynopithecidae beschrieben. Davon scheint mir das von ihm Macacus cf. sivalensis Lyd. genannte Unterkieferstück mit M_1 und M_2 eher einem Semnopithecinen anzugehören, denn besonders an dem weniger abgekauten M_2 sind die Innenhöcker deutlich mesiodistal komprimiert und Querjoche vorhanden.

Von ungleich größerer Bedeutung ist, daß er die von ihm zuerst Semnopithecus zugerechneten oberen P^4, Dm 4 und M^1 (1915, S. 3—6, Taf. 1, Fig. 1—3) Cercopithecus als neue Art asnoti Pilgr. anreiht, weil am P^4 die Höcker dem Vorderrande stark genähert sind und am M^1 vorn ein deutliches Cingulum vorhanden ist, was nie bei Semnopithecus, wohl aber bei Cercopithecus der Fall sein soll. Aber unter meinem rezenten Materiale zeigt Cercopithecus cephus am M^1 weder Querjoche noch ein solches Cingulum, und die Höcker des P^4 befinden sich fast stets mehr oder weniger weit vor der Kronenmitte, z. B. besonders bei Semnopithecus maurus. Der tiergeographisch wichtige Schluß, daß die jetzt nur afrikanische Gattung Cercopithecus im Unterpliocän Indiens nachgewiesen sei, läßt sich daher auf einen solchen Rest, der Semnopithecus oder einem nahen Verwandten davon angehören mag, nicht begründen.

Die Tatsache bleibt aber trotz der von mir erhobenen Einwände bestehen, daß schon im Unterpliocän Südasiens ebenso wie in dem Europas Cynopithecidae vorkommen. Leider kennen wir aus Afrika unterpliocäne und miocäne Säugetierreste erst in sehr geringer Zahl und in dürftigen Resten, und Affen noch gar nicht, so daß tiergeographische Vergleiche, die doch auf gleichalterige Faunen sich stützen sollten, noch nicht mög-

lich sind. Damit erübrigt sich wohl eine besondere Stellungnahme zu den neuesten Ausführungen Arldts (1919, S. 116) über die jungtertiären Primaten Afrikas, die sich wie alle seine Arbeiten nur auf sorgfältige Literaturstudien gründen, die nötige Kritik aber deshalb vermissen lassen.

Was schließlich die mittelpliocäne Affenfauna des Natrontales anlangt, so erscheint es nicht nur höchst wünschenswert, sondern auch aussichtsreich, ihre Kenntnis durch größere Grabungen zu fördern. Affen müssen dort nicht selten gewesen sein, also günstige Lebensbedingungen gehabt haben und es ist nicht unwahrscheinlich, daß auch Menschenaffen dort lebten. Die Reste sind sehr gut erhalten, wenn auch fast nur in Bruchstücken; daß aber die Möglichkeit vollständiger Funde besteht, erweist der 1913 von mir beschriebene prächtige Schädel von Libypithecus. Möge deshalb der Fundort, der mit der Eisenbahn leicht zu erreichen ist, bald ausgiebig ausgebeutet werden, um meine nur vorläufigen unsicheren und unzureichenden Ergebnisse zu ergänzen zu einem wichtigen Beitrage zur Vorgeschichte altweltlicher Primaten.

Literatur-Verzeichnis zu 5. Affen, Nachtrag.

J. Anderson, Zoology of Egypt. Mammalia. London 1902.

Th. Arldt, Die Paläogeographie des Nillandes in Kreide und Tertiär. Geol. Rundschau, Bd. 9, S. 47—56, 104—124. Leipzig 1919.

J. Cocchi, Su di due scimmie fossili italiane. Boll. R. comit. geol. d'Italia, Anno 3, p. 59—71. Taf. 1. Rom 1872.

D. G. Elliot, A Review of the Primates. Monogr. Amer. Mus. natur. hist., Vol. 1—3. New-York 1912.

H. Falconer, Palaeontological memoirs and notes, Vol. 1, p. 298—303, Taf. 24. London 1868.

A. Gaudry, Remarques sur quelques fossiles du musee de Florence. Bull. Soc. geol. France, Sér. 3, Vol. 19, p. 228—230. Paris 1890/91.

A. Hedinger, Über den pliocänen Affen des Heppenloches. N. Jahrb. f. Mineral. 1891, I, S. 169 ff. Stuttgart 1891.

R. Lydekker, Catalogue of the fossil Mammalia in the British Museum, Part 1, p. 2—6. London 1885.

— Siwalik Mammalia, Suppl. 1. Mem. geol. Surv. India. Palaeontologia indica, Ser. 10, Vol. 4, Part 1, p. 4—7, Taf. 1. Calcutta 1886.

P. Matschie, Die Säugetiere der von W. Kükenthal auf Halmahera, Batjan und Nordcelebes gemachten Ausbeute. Abhandl. Senckenb. naturf. Ges., Bd. 25, S. 247 ff. Frankfurt a. M. 1916.

A. Mauche, Les singes fossiles de Montpellier. Bull. Soc. languedoc. Geographie, T. 29, p. 137—148, Taf. 6, 7. Montpellier 1906.

R. Owen, Odontography, Vol. 1, p. 441—443, Taf. 116. London 1840—45.

G. Pilgrim, New Siwalik Primates etc. Rec. geol. Surv. India, Vol. 45, p. 3—9, Taf. 1. Calcutta 1915.

G. Ristori, Le scimmie fossili italiane. Bull. R. comit. geol. d'Italia, Anno 1890, p. 18—30, Taf. 8. Rom 1890.

E. Stromer, Mitteilungen über Wirbeltierreste aus dem Mittelpliocän des Natrontales (Ägypten). 1. Affen. Zeitschr. D. geol. Ges., Bd. 65, S. 350—361, Taf. 7, 8. Berlin 1913.

Ph. Thomas, Recherches stratigraphiques et paléontologiques sur quelques formations d'eau douce de l'Algerie. Mem. Soc. géol. France, Sér. 3, T. 3, p. 14, Taf. 10, Fig. 4. Paris 1884.

6. Nachtrag zu 2. Raubtiere.

In meiner Veröffentlichung über Raubtierreste aus dem Mittelpliocän des Natrontales beschrieb ich (1913, S. 364—367, 369/70, Taf. 9, Fig. 1) einen bezahnten Unterkieferast eines kleinen Fischotters als Lutra libyca nov. spec. Nun liegen mir aus der Freiburger Universitäts-Sammlung zwei untere auch zu Lutra gehörige M_1 (Brechscherenzähne)[1]), vor, die im folgenden beschrieben werden sollen.

Lutra aff. hessica Lyd.

Taf. Fig. 10, 10a.

Der rechte untere M_1 (Brechscherenzahn) *a* ist bis auf die Außenwand des Talonids und einen Längsriß durch die des Trigonids sowie bis auf die Wurzeln sehr gut erhalten und nicht abgekaut. Seine Länge beträgt 16,8 mm, die Breite hinten am Vorderhöcker 7, hinten am Trigonid 9,5 und am Talonid 9 mm.

Nicht nur die Größe schließt also seine Zugehörigkeit zu Lutra libyca aus, sondern er ist auch verhältnismäßig ein wenig breiter als deren M_1; sonst ist er ihm aber nicht unähnlich, speziell darin, daß sein Talonid kaum halb so lang als das Trigonid ist und daß die drei Höcker des letzteren hoch und spitzig und untereinander wenig an Größe verschieden sind, daß die zwei hinteren hinten sehr steil abfallen und daß an dem Außenhöcker hinten unten gleichfalls eine leider abge-

[1]) Der Name Reißzahn ist irreführend, wie Abel (1912, S. 500) mit Recht betonte, und ist deshalb nach seinem Vorschlage durch „Brech"- oder besser „Brechscheren"-Zahn zu ersetzen, so mißlich es ist, einen so lange gebräuchlichen Namen aufzugeben. Für überflüssig und nur Verwirrung stiftend halte ich aber, den guten und längst im Sprachgebrauche befindlichen Namen „Eckzahn" nun durch Reißzahn zu ersetzen.

brochene Leiste sich befand. Der vordere Höcker besitzt aber an seiner Hinterseite lingual eine herablaufende Leiste, ein äußeres Cingulum ist deutlicher als das innere, am Talonid fehlt ein hinteres Höckerchen, sein Außenrand scheint eine einfache hohe scharfe Kante gewesen zu sein, während sein Innenrand ganz niedrig ist. Der Zahn muß also zu einer von Lutra lutra oder libyca zwar verschiedenen, aber ihnen nicht fern stehenden Art gehören.

Von den bisher beschriebenen fossilen Unterkiefern von Lutra sind die von L. affinis Gervais, Lorteti Filhol, lutra Erxleb., oppoliensis R. Wegner, palaeindica Falc. et Cautl. und Valetoni O. Fraas (non Gervais) alle zu klein. L. bathygnathus Lyd. (1884, Taf. 27, Fig. 3, 3a) ist zwar in der Größe des M_1 und im Verhältnis seiner Länge zu seiner mittleren Breite kaum verschieden, hat aber stumpfe, niedrige Trigonidhöcker und ein etwas größeres, vor allem nach innen stärker konvexes Talonid. Bei L. brachygnathus Schlosser ist nach dem hier befindlichen Original der M_1 ein wenig länger und viel schmäler mit ungewöhnlich kleinem Innenhöcker, so daß mir die Zugehörigkeit zur Gattung Lutra nicht ganz sicher erscheint. L. dubia Blainv. unterscheidet sich nach dem von Newton (1890, S. 445, Taf. 28, Fig. 1) beschriebenen M_1 gleichfalls stark durch dessen Schmalheit und den kleinen Innenhöcker, L. Reevei Newton (ebenda, S. 446, Fig. 2) dagegen durch die Breite und das sehr niedere Trigonid des M_1.

Das Unterkieferstück von L. hessica Lyd. (1890, S. 3—5, Fig. A, C) aus dem Unterpliocän von Eppelsheim bei Worms in Hessen aber trägt einen M_1 von fast gleicher Größe, Maßverhältnissen und Form wie der vorliegende, nur ist der Innenrand des Talonids höher. Nach einem hier befindlichen Gipsabgusse eines vom gleichen Fundorte dieser Art zugerechneten Unterkieferstückes mit wohl erhaltenem P_4 und M_1 im Darmstädter Museum ist aber der M_1 schmaler und der Innenhöcker anscheinend kleiner als bei Lydekkers und meinem Original. Deshalb und weil mir weitere zugehörige Reste zum Vergleiche nicht zur Verfügung stehen, kann ich dieses nur mit dem

Namen Lutra aff. hessica Lyd. bezeichnen, umsomehr, als die räumliche Entfernung und das ein wenig verschiedene geologische Alter eine Zugehörigkeit zu einer Art als nicht sehr wahrscheinlich erscheinen lassen.

Lutra aff. capensis Schinz.

Taf. Fig. 11, 11a.

Der linke untere M_1 (Brechscherenzahn) *b* ist in seiner Krone bis auf den Hinter- und Innenrand des Talonids und den vordersten Teil des Cingulums vorzüglich erhalten und nur an dem Vorder- und Außenhöcker abgekaut. Er ist etwa 22 mm lang, hinten am Vorderhöcker 9, hinten am Trigonid 13 und am Talonid sogar 14 mm breit, gehört also einer sehr stattlichen Form an und ist sehr breit. Die drei konischen Trigonidhöcker sind nicht hoch, die hinteren zwei fallen hinten nicht so steil ab wie bei L. hessica und der innere ist verhältnismäßig stark und nur wenig schwächer als die zwei andern gleich großen. Bei diesen ist an den Hinterseiten je eine herabziehende Leiste vorhanden, die besonders an dem Außenhöcker dick ist und sich hier nahe am Außenrand befindet, während sie am Vorderhöcker innen liegt. Je eine Leiste an der Innenseite des Außenhöckers und der Außenseite des Innenhöckers ist nur schwach und abgerundet. Das schüsselförmige Talonid ist eben breiter und fast so lang als das Trigonid, also sehr groß, runzelig mit dickem, erhöhtem Außenrand (Höcker) und anscheinend warzigem niedrigem, aber deutlichem Hinter- und Innenrand versehen. Das Cingulum endlich ist außen und vorn deutlich, innen nicht entwickelt.

Der Zahn unterscheidet sich nach allem also nicht nur in seiner Größe, sondern auch in seinen Maßverhältnissen und in seinen abgerundeten Formen stark von dem M_1 von L. libyca und L. aff. hessica. Schon seine Größe läßt ihn auch von den bei der Besprechung der letzteren auf Seite 362 als zu klein oder gleich groß erwähnten Arten ebenso wie von L. affinis und Bravardi P. Gervais leicht trennen.

Von europäischen fossilen Formen hat der oberpliocäne M_1 von L. Reevei Newton noch niedrigere und unter sich fast gleich große Trigonidhöcker und ein verhältnismäßig noch größeres Talonid. Er ist aber außerdem vorn breiter und deutlich kleiner. L. Campanii Meneghini (1863, S. 18—28, Taf. 1) aus dem etwas älteren (unterpliocänen?) Lignite von Mte. Bamboli in Toskana scheint unserer Form in der Höckerausbildung und Kronenbreite nahe zu stehen, dürfte aber nach den allein beschriebenen oberen M ein wenig kleiner als sie gewesen sein.

Von den aus den vorderindischen pliocänen Siwaliks beschriebenen Arten hat L. sivalensis Falc. et Cautl. aus dem Ganges- und Jumnatale nach Lydekker (1884, S. 195—201, S. 351, Taf. 27, Fig. 5, Taf. 45, Fig. 3, 3a, Textfigur 3) ähnliche stumpfe Höcker an den oberen Backenzähnen. Sein unterer Brechscherenzahn (a. a. O., S. 351, Taf. 45, Fig. 3, 3a) ist leider zu schlecht erhalten zu genauem Vergleich. Seine Länge beträgt 21,3 mm, ist also ziemlich eben so groß wie bei dem $M_1 b$. Das Talonid scheint aber fast noch größer als bei ihm zu sein, das Trigonid jedoch auffällig schmal im Verhältnis dazu. L. bathygnathus Lyd. (1884, S. 193—194, Taf. 27, Fig. 4) aus den Siwaliks des Pandschab endlich hat einen nur wenig kürzeren, 17,3 mm langen M_1, seine Trigonidhöcker sind ebenfalls niedrig und nicht sehr spitzig und sein Talonid ist breit und groß, aber er ist doch sehr deutlich schmaler.

In ihren breiten Brechscherenzähnen mit ungefähr gleich starken konischen Trigonidhöckern und mit verhältnismäßig sehr großem breitem Talonid, überhaupt mit weniger scharfen und spitzigen Höckern und Kanten der hinteren Backenzähne, worin sie sich Enhydra nähern und etwas Meles ähnlich sind, gehören alle diese Formen in die Nähe der rezenten, äthiopischen Lutra capensis Schinz (= inunguis F. Cuvier), von der mir ein wohl aus dem Kapland stammendes Gebiß der hiesigen zoologischen Sammlung zum Vergleiche vorliegt. Hier ist der M_1 19 mm lang, hinten am Vorderhöcker 7, hinten am Trigonid 11 und am Talonid 11,5 mm breit und dieses ist fast so lang als das Trigonid. Die Maßverhältnisse sind also recht

ähnlich denjenigen des M_1 *b* und die Größe nur wenig geringer. Abgesehen von letzterer unterscheidet aber nur noch einerseits die Schwäche der Leisten an der Hinterseite des Vorder- und des Außenhöckers, andererseits die größere Stärke derjenigen an den sich zugekehrten Seiten der zwei hinteren Trigonidhöcker, sowie das Vorhandensein einer schwachen Leiste innen an der Hinterseite des Innenhöckers, denn sonst, z. B. auch im Verhalten des Cingulums, besteht Gleichheit.

Die angegebenen Unterschiede genügen wohl zur spezifischen Trennung, aber ich halte mich bei der wesentlichen Übereinstimmung für berechtigt, den M_1 als Lutra aff. capensis Schinz zu bezeichnen. Allerdings muß ich dabei mangels unmittelbarer Vergleichsmöglichkeit dahingestellt sein lassen, ob der Zahn nicht näher zu L. Campanii oder sivalensis gehört. Endlich ist zu erwähnen, daß das im Senckenberg-Museum befindliche Ulnabruchstück, das ich (1905, S. 121) kurz besprach, vielleicht zu der gleichen Art wie der Zahn *b* zu rechnen ist.

Ergebnisse.

Aus so ungenügenden Resten, wie einzelnen Zähnen, weitergehende Schlüsse zu ziehen, ist natürlich gewagt. Jedenfalls erscheint aber sicher gestellt, daß an den Ufern des libyschen Urnils in Unterägypten zur Mittelpliocänzeit drei in Größe und Form deutlich verschiedene Fischotterarten lebten. Dieser Artenreichtum ist auffällig, da in der Gegenwart höchstens zwei Arten in derselben Gegend festgestellt sind, z. B. Lutra capensis und maculicollis sowie L. brasiliensis und paranensis in manchen Gebieten Afrikas bzw. Südamerikas, und auch fossil nur in den Siwaliks, überdies in getrennten Orten mehrere Arten nachgewiesen sind, wobei nicht einmal wahrscheinlich ist, daß es sich um geologisch gleichalterige Formen handelt, weil die Siwalikstufe sehr umfangreich ist[1]). Diesem Befund gegenüber ist die von mir (1913, S. 369) schon hervorgehobene

[1]) Von den zwei Arten im englischen Crag ist L. dubia im Roten Crag, L. Reevei in dem ein wenig jüngeren Norwich-Crag gefunden.

Tatsache des Fehlens von Fischottern im jetzigen unteren Nil um so auffälliger. Es ist vollkommen ausgeschlossen, daß der Mensch so scheue Tiere in den Sümpfen des Nildeltas und der unterägyptischen Seen ausgerottet hat, da ihm dies trotz hoher Prämien und bei eifrigster Verfolgung nicht einmal im heutigen Deutschland gelungen ist, und es ist nicht einzusehen, warum die Gattung in Ägypten ausstarb, während sie ringsum, in Asien, Europa, Äthiopien und im westlichen Nordafrika, noch jetzt verbreitet ist.

Bei der fast vollständigen Unkenntnis der oberpliocänen und diluvialen Wirbeltierfauna Ägyptens kann man auch nicht sagen, wann Lutra aus diesem Gebiete verschwand. Da die Unkenntnis der jungtertiären Wirbeltierfaunen Afrikas von dem Mittelpliocän bis zum Untermiocän eben so groß ist, läßt sich natürlich auch nicht feststellen, wann sie in Ägypten und überhaupt in Afrika auftauchte. Lutrinae könnten eben so gut schon im Miocän aus dem paläarktischen Gebiete eingewandert sein, wie im Unterpliocän mit vielen Bestandteilen der Pikermifauna zusammen. Da aber diese eine Steppenfauna ist, erscheint nicht gerade wahrscheinlich, daß an Wasser gebundene Formen wie Lutrinae zur trockenen Unterpliocänzeit günstige Wanderungsbedingungen fanden. Ein ursprüngliches äthiopisches Faunenelement stellen sie ja nicht dar, meine diesbezügliche Erwähnung (1916, S. 400) sollte ja keineswegs so verstanden werden, wie schon die dortige Anmerkung erweist; sie haben sich erst nach der Abtrennung Madagaskars von Äthiopien, also nach dem Mitteltertiär, dort ausgebreitet, da sie wenigstens im Quartär und in der Gegenwart in der madagassischen Region fehlen, also höchst wahrscheinlich nie in sie vordrangen. Im Pliocän wie jetzt sind die Lutrinae jedenfalls tiergeographisch sehr wenig verwertbar, da sie wenigstens auf den großen Festländern wie so viele Raubtiere im Gegensatz zu den mehr speziellen Bedingungen angepaßten Pflanzenfressern zu weit und allgemein verbreitet sind. Es lassen sich also die Lutrinae im Pliocän nicht einfach im Sinne Arldts (1919, S. 116 ff.) dafür verwerten, daß die Säugetierfauna des

Natrontales einen ausgeprägt nordischen Charakter trug, denn unsere Unkenntnis der damaligen äthiopischen Fauna darf uns doch nicht zu der Annahme verführen, daß sie nicht genau wie jetzt sowohl in Äthiopien wie in dem paläarktischen Reiche verbreitet, also im Gegensatze zur Gegenwart für eines der beiden Reiche bezeichnend waren[1]).

Eine Aufteilung der Gattung Lutra in natürliche Untergattungen ist eben sehr schwierig, wie z. B. die Ausführungen Lydekkers (1884, S. 195—201) über die von Falconer und Cautly für L. sivalensis aufgestellte Gattung Enhydriodon (siehe Falconer 1868, S. 331—338, Taf. 27) beweisen. Jedenfalls ist aber bemerkenswert, daß im Pliocän Indiens, Europas und Ägyptens Formen mit breiten unteren Brechscherenzähnen, die mit stumpfen, ungefähr gleich großen Trigonidhöckern und mit großem Talonid versehen sind und die auch an den oberen Backenzähnen keine scharfen Spitzen und Kanten haben, die sich also Lutra capensis anreihen und zu Enhydra überleiten, neben Formen vorkommen, die sich Lutra lutra anschließen, welche also schmalere untere Brechscherenzähne mit meistens kleinem Talonid und mit hohen spitzigen, meistens deutlich ungleichen Trigonidhöckern und mit schneidenden Kanten und entsprechend mit Spitzen und scharfen Kanten versehene obere Backenzähne besitzen. Jetzt herrschen letztere Formen vor und finden sich auf den Festländern des arktogäischen Reiches allein, aus dem älteren Jungtertiär und im Oligocän kennt man auch nur sie z. B. Potamotherium; die Capensisformen scheinen also die spezialisierteren zu sein, wofür auch ihre stattliche Größe spricht.

[1]) Gerade der oben schon hervorgehobene unerwartete Nachweis, daß in einem Lande, wie Ägypten, wo jetzt aus unersichtlichen Gründen Fischotter fehlen, solche im Pliocän formenreich vertreten waren, muß wie der ähnliche Befund bezüglich des Fehlens und Vorkommens von Hippopotamus in der Gegenwart und im Quartär Madagaskars erneut zur größten Vorsicht mahnen, aus dem Nichtkennen eines Säugetiers in einer Formationsstufe auf ein wirkliches und dauerndes Nichtvorkommen zu schließen. Nur positive Befunde ergeben in der Paläontologie völlige Sicherheit.

Es wäre von Interesse, zu prüfen, ob diese Gebißunterschiede mit solchen der Ernährung zusammenhängen, wie zu vermuten ist; nämlich, ob im Gegensatz zu den Lutraformen, die reine Fisch- und Fleischfresser sind, die allerdings auch Krebse nicht verschmähen, die Capensisformen nicht doch mehr omnivor oder vielmehr cancrivor sind und vor allem Krebse und Conchylien zerknacken. Nach dem wenigen, was man nach Sclater (1900, S. 108) über ihre Lebensweise weiß, ist dies allerdings nicht der Fall, Lönnberg aber (1908, S. 7—11) spricht sich auf Grund zuverlässiger Berichte, wonach die Hauptnahrung Krabben wären, entschieden in dem hier wiederholten Sinne aus. Von Enhydra (= Latax), dem Extrem des stumpfhöckerigen Gebisses, wird überdies berichtet, daß sie Seeigel, Krebse, Muscheln und Fische, weniger Seegras und Fleisch frißt.

Literatur-Verzeichnis zu 6. Raubtiere, Nachtrag.

O. Abel, Grundzüge der Paläobiologie der Wirbeltiere. Stuttgart 1912.

Th. Arldt, Die Paläogeographie des Nillandes in Kreide und Tertiär. Geol. Rundschau, Bd. 9, S. 47—56, 104—124. Leipzig 1919.

H. Falconer, Palaeontogical memoirs and notes, Vol. 1, p. 331—338, Taf. 27. London 1868.

E. Lönnberg, On the clawless Otter of Central Africa (Lutra capensis hindei Thomas) and biological adaptations of african clawless Otters. Arkiv f. Zoologi, Bd. 4, No. 12, p. 1—11, 1 Taf. Upsala 1908.

R. Lydekker, Siwalik Mammalia, Suppl. 1. Mem. geol. Surv. India, Palaeontologia indica, Ser. 10, Vol. 4, Part 1, p. 187—201, 351, T. 27 und 45. Calcutta 1884.

— On a new species of Otter from the lower Pliocene of Eppelsheim. Proc. zool. Soc., 1890, p. 3—5. London 1890.

G. Meneghini, Descrizioni dei resti di due fiere trovati nelle ligniti mioceniche de Monte Bamboli. Atti Soc. ital. Sci. natur., Vol. 4, p. 18—28, Taf. 1. Mailand 1863.

E. T. Newton, On some new Mammals from the Red and Norwich crag. Quart. Journ. geol. Soc., Vol. 46, p. 444—446, Taf. 18. London 1890.

W. L. Sclater, The Mammals of South Africa. Vol. 1, p. 106—110. London 1900.

E. Stromer, Fossile Wirbeltierreste aus dem Uadi Faregh und Uadi Natron in Ägypten. Abhandl. Senckenb. naturf. Ges., Bd. 29, S. 121. Frankfurt a. M. 1905.

— Mitteilungen über Wirbeltierreste aus dem Mittelpliocän des Natrontals, 2. Raubtiere. Zeitschr. D. geol. Ges., Bd. 65, S. 362—372, Taf. 9. Berlin 1913. (Ebenda weitere Literatur über Lutrinae.)

— Die Entdeckung und die Bedeutung der Land und Süßwasser bewohnenden Wirbeltiere im Tertiär und in der Kreide Ägyptens. Zeitschr. D. geol. Ges., Bd. 68, S. 397—425. Berlin 1916.

Tafelerklärung.

Alle Figuren sind in natürlicher Größe gezeichnet.

Fig. 1. Aulaxinuus libycus nov. spec. Linker Unterkieferast *C* mit P_4—M_3 von oben, 1a von außen.

Fig. 2 cfr. Aulaxinuus libycus nov. spec. Unterkiefersymphyse *F* mit J_1—M_1 von oben, 2a von rechts.

Fig. 3. Aulaxinuus libycus nov. spec. Oberer rechter M^2 *G*, Kronenansicht, 3a von außen.

Fig. 4. Libypithecus Markgrafi Stromer. Linker Oberkiefer *D* mit P^3—M^1 von unten.

Fig. 5. Papio spec. indet. Bruchstück des linken Unterkieferastes *E* mit M_1 und M_2 von oben, 5a von außen.

Fig. 6 cfr. Papio spec. indet. Oberer linker M^1 oder M^2 *H* von oben, 6a von außen.

Fig. 7. Semnopithecine? Oberer linker P^4 *K*, Kronenansicht.

Fig. 8. Semnopithecine? Unterer linker zweiter Milchmolar? *I* von oben

Fig. 9. Semnopithecine? Unter linker M_3 *L* von oben, 9a von inne und ein wenig von oben.

Fig. 10. Lutra aff. hessica Lyd. Unterer rechter Reißzahn *A* von oben, 10a von innen und ein wenig von oben.

Fig. 11. Lutra aff. capensis Schinz. Unterer linker Reißzahn *B* von oben, 11a von außen und ein wenig von oben.

7

1

8

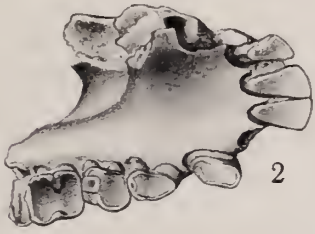
6

1a

9

9a

6a


2

10

3

10a

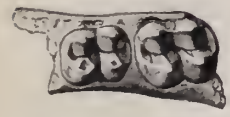
3a

2a

11

4

5a


5

11a

Ant. Birkmaier gez.

Optische Beweise für die Erdkrümmung sonst und jetzt.

Von **S. Günther.**

Vorgelegt in der Sitzung am 3. Juli 1920.

Eine sehr eigenartige, von der Geschichte der Wissenschaften jedoch wenig beachtete Persönlichkeit ist Scipio Chiaramonti[1]) (Claramontius) aus Cesena in der Romagna (1565—1652). Unter den überzeugten Aristotelikern, die jede Neuerung ablehnten, die jeden Satz ihres Meisters als untrügliche Wahrheit hinnahmen, steht er wohl als der konsequenteste da. Kein Wunder, daß die fortschrittlicher gesinnten Kreise ihn mit aller Schärfe bekämpften[2]), und daß er zeit seines langen Lebens fast fortwährend in Polemiken verwickelt war. So kam es, daß auch gar manche Gedanken und Anregungen, die von ihm ausgingen, keine gute Stätte fanden, sondern ohne genauere Prüfung zurückgewiesen wurden. Ein Fall dieser Art soll uns hier wesentlich beschäftigen; doch wird es sich empfehlen, zuvor der gesamten literarischen Tätigkeit des Mannes eine kurze Betrachtung zu teil werden zu lassen[3]).

---

[1]) Sowohl Galilei im „Saggiatore" (Le Opere di Galileo Galilei, Edizione Nazionale, 6. Band, Florenz 1896, S. 231) als auch Nelli (s. u.) schreiben auffallenderweise Chiaramonte.

[2]) Der toskanische Literarhistoriker G. C. Nelli führt (Saggio di storia letteraria Fiorentina del secolo XVII, Lucca 1759, S. 18) in sehr unhöflicher Weise „quella porcheriola del Chiaramonte" an.

[3]) Abgesehen von den Enzyklopädien eines Jöcher und Zedler findet man die umfassendsten und zuverlässigsten Angaben über Chiaramonti bei R. P. Nicéron (Memoires pour servir a l'histoire des hommes illustres dans la republique des lettres, 30. Band, S. 157 ff.).

Natürlich nur, insoweit er sich mit naturwissenschaftlichen Dingen beschäftigt hat, denn Chiaramonti war zwar mehrere Jahre Professor an der Universität Pisa, bekleidete aber nachher durch viele Jahre städtische Ämter in seiner Heimat und schrieb hier über verschiedenartige Dinge, die uns nicht näher angehen.

Als eine seiner Hauptaufgaben sah er die an, die Sublunarität der Kometen und Neuen Sterne zu erweisen, um so die in dem Buche „De Cœlo" vertretene aristotelische Theorie zu retten[1]). Auch war er selbstverständlich entschiedener Anticopernicaner[2]). Seine naturphilosophischen und meteorologischen Schriften[3]) sind teilweise erst posthum heraus-

[1]) Discorso della Cometa Pogonare dell' anno 1618, aggiuntavi la Risposta della Cometa prossima antecedente, Venedig 1619; Anti-Tycho, in quo contra Tychonem-Brahe, et nonnullos alios, rationibus eorum ex Opticis et Geometricis principiis solutis, demonstratur Cometas esse sublunares, non coelestes, Venedig 1621; Apologia pro Anti-Tychone suo adversus Hyperaspisten Joannis Kepleri, Venedig 1626; De tribus novis stellis, quae annis 1572, 1600 et 1604 comparuere, libri tres, in quibus demonstratur rationibus ex parallaxi praesestim ductis stellas eas fuisse sublunares et non coelestes, adversus Tychonem, Gemmam, Maestlinum, Digesseum, Hagecium, Samucium, Kepplerum, aliosque plures, quorum rationes in contrarium adductae solvuntur, Cesena 1628; Difesa di Scipione Chiaramonti al suo Anti-Tychone, e libro delle tre nuove stelle dall' oppositioni dell' Autore de' due Massimi Sistemi Tolemaico e Copernicano, Florenz 1633; Examen ad Censuram Joannis Camilli Gloriosi in librum de tribus novis stellis, Florenz 1636; De sede sublunari Cometarum Opuscula tria in supplementum Anti-Tychonis cadentia, Amsterdam 1636; Castigatio Joannis Camilli Gloriosi adversus Claramontium castigata ab ipso Claramontio, Cesena 1638; Defensio ab oppugnationibus Fortunii Liceti de sede Cometarum, Cesena 1644. Wir lernen durch diese Übersicht auch die Hauptgegner des Autors kennen: G. C. Gloriosi (1572—1643) und F. Liceti (1577—1657).

[2]) Anti-Philolaus, in quo Philolaus redivivus de terrae motu et solis ac fixarum quiete impugnatur, necnon positio eadem de re Copernici confutatur, et Galilaei defensiones rejiciuntur, Cesena 1643. Das Buch soll dasjenige des J. Bouillaud widerlegen: Philolaus, seu de vero systemate Mundi, Amsterdam 1639.

[3]) De Universo libri XVII, Cöln 1644; Philosophia Naturalis methodo resolutiva tradita, seu de principiis et communibus affectionibus

gekommen. An dieser Stelle soll hauptsächlich die Rede sein von einem bisher nicht genannten Werke [1]), worin Chiaramonti eine Anzahl von Abhandlungen aus dem Gebiete der reinen und angewandten Mathematik vereinigte, und welches von seinen sämtlichen Veröffentlichungen zweifellos deshalb am höchsten steht, weil seine stagiritischen Schrullen in ihm keine Rolle spielen [2]), vielmehr allerorts das Streben nach exakt wissenschaftlicher Darstellung hervortritt. Wir geben Titel und Inhalt der einzelnen Bestandteile im folgenden kurz wieder.

1. De Phasibus Lunae, quo modo rotunda, modo dimidiata, modo aucta lumine, modo diminuta apparet. Der Zweck des Aufsatzes ist zu ermitteln, ein wie großer Teil der Mondkugel beleuchtet ist, wenn man deren Stellung zu Sonne und Erde kennt.

---

rerum naturalium libri XI, Cesena 1652; Commentaria in Aristotelem de Iride, de Corona, de Pareliis et Virgis, editore Petro Ruinetto, Cesena 1654 (Corona bedeutet den kleinen Sonnen- oder Mondhof, Virga jene wohlbekannte Erscheinung, für die bei uns der Name „Wasserziehen" üblich ist); In quartum Meteororum Aristotelis librum Commentaria, editore Petro Gallo, Venedig 1668.

[1]) Das der Staatsbibliothek angehörige Exemplar führt nachstehenden Titel: Scipionis Claramontii philosophi profundissimi ac mathematici celeberrimi opuscula varia mathematica nunc primum in lucem edita, Bologna 1653. Man muß wohl annehmen, daß entweder die ganze Sammlung oder doch einer ihrer Teile schon einmal viel früher gedruckt gewesen ist. Sicher steht, daß die Kaukasus-Schrift (Nicéron, a. a. O., S. 164) schon früher in Paris gedruckt und in den Handel gekommen war.

[2]) Chiaramonti, sagt O. Zöckler (Geschichte der Beziehungen zwischen Theologie und Naturwissenschaft mit besonderer Berücksichtigung der Schöpfungsgeschichte, 1. Abteilung, Gütersloh 1877, S. 539) betrachtete jeden Versuch, über Aristoteles und Ptolemaeus hinauszugehen, als eine Art Verbrechen. Ja, in einer gewissen Beziehung war er ein noch weit entschiedenerer Reaktionär. Er wärmte die von Maimonides und Dante vertretene Ansicht wieder auf, daß die Leitung der Bewegung der Planeten je einem besonderen Engel übertragen sei — eine patristische Doktrin, die auf ein noch weit höheres Alter Anspruch erheben kann, denn sie geht (O. Peschel, Geschichte der Erdkunde bis auf A. v. Humboldt und C. Ritter, München 1865, S. 88) auf die orientalische Kirchenväterschule zurück, auf Patricius, Thomas Edessenus, Cosmas Indicopleustes.

2. De horizonte sensibili. Eine Betrachtung über den Unterschied zwischen wahrem und scheinbarem (sinnenfälligem) Horizont.

3. De Usu Speculi pro Libella et de tota Libratione. Erörterungen verschiedenster Art über das Wesen der Wägung und die Einstellung horizontaler Linien, wobei insbesondere des Vitruvius Wasserwage („Chorobates") eingehende Berücksichtigung findet.

4. De altitudine Caucasi[1]).

5. Ex inspectione imaginis subjecti per reflexionem ex aqua quiescente in vase, investigare quanta sit semidiameter Terrae. Dies ist die Arbeit, welcher die nachfolgende Untersuchung wesentlich gilt.

In einer Darstellung, die allerdings selbst für jene Zeit schleppend und nicht leicht verständlich genannt werden muß, verbreitet sich der Autor über die Möglichkeiten, rein ter-

[1]) Direkte Methoden zur Messung von Berghöhen standen dem Altertum, dem Mittelalter und auch noch der beginnenden Neuzeit nicht zu gebote. Aristoteles gab deshalb als ein Aushilfsmittel das an, die Zeit festzustellen, während deren ein Berg von der auf- und untergehenden Sonne beleuchtet werde. Da die einschlägigen Worte des Meisters eine gewisse Unklarheit zu enthalten schienen, so haben sie, wie wir erfahren, den Kommentatoren reichlich zu tun gegeben. Unsere Aufgabe, so erklärt der Autor, läßt sich nur dann richtig verstehen, wenn wir die Worte des Aristoteles so deuten, daß der „Mons Caucasus" während des dritten Teiles der Nacht von Osten her und eben so lange von Westen her bestrahlt werde. Es müsse aber auch der Standort der Sonne gegeben sein, denn im Hochsommer werde die Beleuchtung anders als im Winter ausfallen. So wird denn für die Tage der Solstitien und Äquinoktien das Problem der sphärischen Trigonometrie behandelt, welches die Höhenbestimmung in sich schließt, und zwar wird auch die Mächtigkeit der Atmosphäre gemäß den bekannten Vorschriften des Arabers Alhazen beleuchtet, um die Dämmerungsdauer richtig abzuschätzen. Mit Anwendung der neuen Formelsprache sucht die fraglichen Rechnungen wiederzugeben A. G. Kästner (Weitere Ausführung der Mathematischen Geographie besonders in Absicht auf die sphäroidische Gestalt der Erde, Göttingen 1795, S. 459 ff.), indem er sich namentlich auf das Werk „De situ orbis" des Pomponius Mela und dessen Ausgabe durch J. Vossius (Haag 1658) bezieht.

restrisch, ohne Zuhilfenahme astronomischer Beobachtungen, die Größe der Erdkugel zu ermitteln. Da ist vor allem das Verfahren des Maurolico zu nennen[1]). Nachher ist auch die Rede von der verschiedenen Krümmung der Flüssigkeitsoberfläche in zwei vom Erdmittelpunkte ungleich weit abstehenden Gefäßen der nämlichen Größe und Beschaffenheit[2]). Hier könne

---

[1]) Über dasselbe, welches in des Sizilianers „Cosmographia" (Venedig 1543) enthalten ist, orientiert am besten P. Riccardi (Sopra un' antico metodo per determinare il semidiametro della terra, Memorie dell' Accademia di Bologna, 8. Band, S. 63 ff. Von einem Höhenpunkte aus, der um $(R + h)$ vom Erdzentrum entfernt ist, wird eine Berührende an die Kugel gelegt, deren Länge l Maurolico mittelst eines eigenartigen Instrumentes messen zu können vermeinte. Dann besteht die Proportion $h : l = l : (2R + h)$. Es verdient immerhin bemerkt zu werden, daß der bekannte englische Geodät Clarke, diesem Grundgedanken folgend, durch eine Messung auf dem Gipfel des Ben Nevis in Schottland (1343 m) einen leidlichen Wert für den Erdhalbmesser erhielt. Als eine Weiterführung können die verschiedenen Vorschläge gelten, dieses Ziel durch Messung der Depression des Horizontes zu erreichen (G. B. Riccioli, Geographiae et Hydrographiae reformatae libri XII, Bologna 1661, S. 163 ff.).

[2]) Hierauf haben zuerst die Araber hingewiesen, und Gelehrte des Westens nahmen die ganz richtige Idee wieder auf (vgl. E. Wiedemann, Inhalt eines Gefäßes in verschiedenen Abständen vom Erdmittelpunkte, Annalen der Physik und Chemie, (3) 39. Band, S. 319). Sie beruht auf dem archimedischen Fundamentalsatze der Hydrostatik (De iis, quae in humido vehuntur, lib. I, theorema II): Die Oberfläche jeder ruhenden Flüssigkeitsmasse hat die Gestalt einer mit der Erde konzentrischen Kugel (Archimedis Opera Omnia cum commentariis Eutocii, ed. J. L. Heiberg, Vol. II, Leipzig 1881, S. 360). Darauf gründeten nach Wiedemann (s. o.) Alkhazīni und Roger Bacon den Schluß, ein Gefäß könne umsoweniger Wasser aufnehmen, je höher es stehe. Am einfachsten beweist sich das, wenn man zwei kongruente Hohlzylinder vergleicht und für verschiedene Seehöhen den Kubikinhalt der Kugelhauben berechnet, die über den oberen Rand der Mantelflächen emporragen (vgl. S. Günther, Astronomische Geographie, 3. Aufl., Leipzig 1915, S. 64). Nach Chiaramontis Angabe hätten Männer von Ansehen — H. Cardano, A. Piccolomini — an der Richtigkeit jenes Theoremes des Archimedes gezweifelt; ihnen stellt er, ohne Quellenangabe, die Zeugnisse des Alliacus und Clavius gegenüber.

nun auch der katoptrische Beweis für die Erdrundung einsetzen[1]). Daß das Spiegelbild eines von einem Konvexspiegel reflektierten Gegenstandes kleiner als dieser selbst sei, lehre ein einfacher Versuch. Man brauche nur an jene Kugeln zu denken, welche man als Zierobjekte in den Gärten und Prunkräumen der Vornehmen antreffe, um sich zu überzeugen, daß darin alles verkleinert werde. Wenn somit die freie Oberfläche eines mit Wasser oder Wein gefüllten Gefäßes solche verkleinerte Spiegelbilder liefere, so sei damit dargetan, daß jene Fläche keine ebene, sondern nur eine konvex gekrümmte sein könne. Ein direktes Mittel, die Verkleinerung zu messen, besaß jene Zeit noch nicht, und so verfiel Chiaramonti auf einen Ausweg, der freilich, wenn sich auch theoretisch nichts gegen ihn einwenden läßt, praktisch kein verwertbares Ergebnis zu liefern vermag.

In unserer Figur sei C der Mittelpunkt der sphärischen, das Licht zurückwerfenden Fläche MN. Aus B gelange ein Lichtstrahl nach Punkt D, und dieser werde so reflektiert, daß $\sphericalangle BDE = \sphericalangle ADF$ sind, wenn EF die in D an den Kreis MN gelegte Tangente bedeutet. Alsdann soll die folgende Proportion gelten:

I. $$BC : CG = BE : EG.$$

Um sie zu beweisen, wird durch B eine Linie parallel zu AG gezogen, welche den verlängerten Halbmesser CD in H schneidet. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke CBH und CGD ergibt sich

II. $$BH : GD = BC : CG.$$

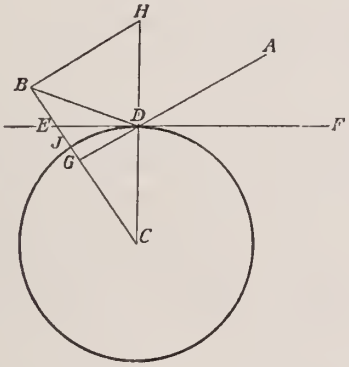
[1]) Die Anordnung des Stoffes in Chiaramontis Schrift ist höchst sonderbar, und wir haben uns deshalb auch oben nicht an sie gehalten. Er gibt nämlich zuerst die geometrische Erörterung, deren Endzweck der Leser zunächst gar nicht einsieht, und erst am Schlusse läßt er die Ursache folgen, welche ihn zu jener Betrachtung veranlaßte. Daß er alle Schriftsteller zitiert, die sich mit der Lehre vom Sehen und von den Spiegeln befassen, wie Euclides, Alhazen und Witelo (Vitellion), versteht sich von selbst.

Das Dreieck BDH hat die beiden gleichen $\sphericalangle BHD$ und HDB; somit ist auch $BH = BD$ und

III. $$BD : GD = BC : CG.$$

Die Gerade DE halbiert $\sphericalangle BDG$, und deshalb hat man nach einem bekannten Satze der Elementargeometrie:

IV. $$BD : GD = BE : EG.$$



Aus III. und IV. folgt durch Komparation die Proportion I der Behauptung.

Es sei ferner J der Punkt, in welchem die Linie CB dem Kreise begegnet. Gesetzt, man wäre imstande, die vier Strecken BD, DG, BG und BJ zu messen, so könnte man im nämlichen Maße auch CJ, den Kreisradius, ausdrücken.

Und zwar wird dies folgendermaßen zu machen sein. Die beiden Strecken BE und EG sind, weil man ihre Summe kennt, aus Proportion I zu entnehmen, und dann ist $EJ = BJ - BE$ ebenfalls bekannt. Die Winkelhalbierende DE des Dreiecks BDG läßt sich durch die beiden Segmente BE und EG und durch die beiden anderen Seiten BD und DG darstellen; es ist[1])

$$DE^2 = BD \cdot DG - BE \cdot EG.$$

[1]) Im Originale sieht diese Herleitung natürlich ganz anders aus, weil dasselbe noch nichts von Gleichungen weiß und sich auf die An-

Endlich liefert das in D rechtwinklige Dreieck CDE den pythagoreischen Satz:

$$(R + EJ)^2 = \overline{DE}^2 + R^2.$$

DE und EJ sind bekannt; mithin gilt dies auch für den Halbmesser R, denn es ist

$$R = \frac{(DE + EJ)(DE - EJ)}{2EJ}.$$

Die gestellte Aufgabe ist damit gelöst.

Auf die Art und Weise, wie Chiaramonti dieses theoretische Ergebnis praktisch zu verwerten trachtet, soll hier nicht näher eingegangen werden. Denn daß in Wirklichkeit ein solcher Versuch niemals ernsthaft unternommen werden konnte, bedarf keines Beweises. Auch ist die Figur, an welcher das Verfahren erläutert werden soll[1]), so undeutlich und mangelhaft ausgeführt, daß man mit ihrer Hilfe sich unmöglich eine Vorstellung zu bilden vermag, wie sich eigentlich der Autor zu verhalten beabsichtigte. Es muß jedoch anerkannt werden, daß das katoptrische Prinzip, von dem ausgegangen wird, ein richtiges ist, und daß, wenn es möglich wäre, gewisse Streckenmessungen, wie sie die Theorie vorschreibt, tatsächlich vorzunehmen, das Ziel erreicht, ein augenfälliger Beweis für die Sphärizität der Erde erbracht sein würde. Es scheint indessen dem ganzen Bestreben keinerlei weitere Folge gegeben worden zu sein. Nirgendwo in der Literatur läßt sich ein Hinweis auf die Beziehungen der Erdkrümmung zu optischen Sätzen im Verlaufe des 17. und 18. Jahrhunderts aufzeigen. Offenbar war Chiaramontis Name durch die Zurückweisungen, welche seine rabulistischen Angriffe von seite Galileis und Keplers erfahren hatten, in Mißkredit gekommen, und darunter litten auch diejenigen von ihm ausgegangenen Anregungen,

einanderreihung von Proportionen beschränkt, was für einen Leser der Gegenwart das Verständnis nicht erleichtert. Dazu kommt noch als erschwerender Umstand die für einen italienischen Druckort geradezu auffällige Unvollkommenheit der graphischen Darstellungen.

[1]) A. a. O., S. 287.

denen ein berechtigter Kern nicht abgesprochen werden kann. Wahrscheinlich hat auch die höchst undurchsichtige Schreibart des Autors dazu beigetragen, das Bekanntwerden seiner Arbeit in weiteren Kreisen zu erschweren. Galileis kurze, ironisch gefärbte Bemerkungen[1]) dürften ihrem Zweck am besten gedient haben; daß Kepler mit so gewaltigem Rüstzeuge gegen den „Eques et Doctor perillustris" zu Felde zieht, wie er es tut[2]), wird man als eine Verschwendung seiner gewaltigen Geisteskraft beinahe mißbilligen müssen, obwohl die fragliche Schrift zweifellos auch viel an sich bemerkenswertes enthält.

---

[1]) Le Opere di Galileo Galilei, 7. Band, Florenz 1897. Im „Dialogo" finden sich zwei hier einschlägige Stellen. So sagt Sagredo (S. 296, S. 504), eines der von Chiaramonti beigebrachten Argumente richte sich gegen ihn selbst, und Salviati (S. 304, S. 504) widerlegt mit scharfer Logik die Gründe dafür, daß der Neue Stern vom Jahre 1572 sich diesseits der Mondsphäre befunden habe.

[2]) J. Kepler, Tychonis Brahei Dani Hyperaspistes adversus Scipionis Claramontii Caesenatis Itali, Doctoris et Equitis Anti-Tychonem in aciem productus, Frankfurt a. M. 1625. Ein Untertitel besagt: „In quo libro doctrina praestantissima de Parallaxibus, deque Novorum siderum in sublimi aethere discussionibus, repetitur, confirmatur, illustratur". S. auch Johannis Kepleri Astronomi Opera Omnia, ed. Ch. Frisch, 7. Band, Frankfurt a. M. 1868, S. 147 ff. Der sonderbar anmutende Haupttitel soll dartun, daß der Autor sich als Schildträger des mit Unrecht angegriffenen Tycho Brahe fühle und den Angreifer bekämpfe. Da dieser das Wesen und die Berechnung einer Parallaxe nicht verstanden, so gibt Kepler eine ausführliche Theorie des parallaktischen Winkels und seines Zusammenhanges mit der Messung kosmischer Entfernungen. Die große Unklarheit, welche mehrfach hierüber obwaltete, wird auch bestätigt durch eine Nachricht A. Favaros (Galileo Galilei e lo studio di Padova, 1. Band, Florenz 1883, S. 282). Chiaramonti soll von G. Ciampoli, einer in der Geschichte Galileis wiederholt genannten Persönlichkeit, eine merkwürdige Geschichte gehört haben: „fuisse philosophum Patavii celebrem, qui Galilaeum tum mathematicas ibi profitentem interrogavit, quidnam esset parallaxis, velle enim se illam scriptis confutare." Der sonderbare Herr, der über eine Sache schreiben wollte, die ihm noch völlig unbekannt war, soll Antonio Lorenzini gewesen sein. Man kann es Galilei nachfühlen, wenn es weiter von ihm heißt: „Risit vir ille solertissimus propositum hominis, qui jam decreverat confutare quod nondum intellexerat verum esset an falsum."

Der einzige Gelehrte späterer Zeit, der Chiaramontis gedenkt, ist, wie es den Anschein hat, der Kepler-Herausgeber Ch. Frisch gewesen[1]), der wenigstens die für uns in Betracht kommende Schrift namhaft macht, ohne allerdings näher auf sie einzugehen. Er urteilt über den Gegner des großen deutschen Astronomen scharf ab, was ja bei seinen Beziehungen zu diesem letzteren nicht wunder nehmen kann; nachdem er den „eques Caesenas", wie er sich gleichfalls ironisch ausdrückt, als einen Mann gekennzeichnet hat, der wegen seiner Leisungen als Philosoph und Historiker von Literaturkundigen gelobt worden sei, fährt er fort: „minus profecit in astronomicis". Er kommt dann nochmals auf Claramontius zu sprechen, der sich beklagt habe, daß Kepler eine so herbe Polemik gegen ihn richtete[2]); herber, quam eques Caesenas, professor Pisanus, audire consueverat. In der Tat war diese Beschwerde nicht ungerechtfertigt.

Die Folgezeit hat die Möglichkeit, lediglich durch terrestrische Beobachtungen die Kugelgestalt unseres Planeten zu erkennen und gegebenenfalls metrisch zu ermitteln, so gut wie ganz beiseite gesetzt[3]), bis erst in den letzten Dezennien der

---

[1]) Ch. Frisch, a. a. O., S. 149.

[2]) A. a. O., S. 155 ff. Es wird dort hingewiesen auf einen Brief, welchen Kepler am 9. Mai n. St. 1627 aus Ulm an den Straßburger Mathematiker M. Bernegger schrieb. Darin bemerkt ersterer, er habe gegen den Widersacher Brahes sehr kräftige Töne angeschlagen („in eo libro acer fui et acerbus in Claramontium, nolim tibi exemplo esse"). Wer Keplers milde und versöhnliche Denkart kennt, begreift, daß er dem Freunde gegenüber Gewissensbisse über sein Verhalten empfunden zu haben scheint.

[3]) Daß die Wahrnehmungen, welche man machen kann, wenn ein Fahrzeug auf einer größeren Wasserfläche sich nähert oder entfernt, für die Rundung sprechen, ist so bekannt, daß man längst auf sie einen augenfälligen Beweis in gemeinverständlichen Darstellungen zu gründen pflegt. Schon in seinem Aristoteles-Kommentar (Augsburg 1519) sucht der bekannte Johann Eck diese Tatsache durch eine freilich etwas kuriose Zeichnung zu erläutern (vgl. S. Günther, Johann Eck als Geograph, Forschungen zur Kultur- und Literaturgeschichte Bayerns, 2. Band, S. 140 ff.). Daß man auch den Versuch quantitativer Verwertung

Plan wieder auftauchte und nunmehr, weil ganz andere Hilfsmittel zur Verfügung standen, eine Gestalt gewann, wie sie im 17. Jahrhundert nicht erreichbar gewesen wäre. Auf den

---

dieser Gesichtseindrücke wagen konnte, bekundet J. Müller, Lehrbuch der kosmischen Physik, herausgegeben von Peters, Braunschweig 1894, S. 46; s. auch J. Pick, Die Kugelgestalt der Erde, Zeitschr. f. math. u. naturwissensch. Unterricht, 2. Band, S. 505 ff.). Eine ganz interessante Anekdote über die hier obschwebende Frage entnimmt man der Autobiographie eines berühmten britischen Naturforschers (A. R. Wallace, My Life, a Record of Events and Opinions, 2. Band, London 1905, S. 365 ff.); der Verfasser wurde dankenswerterweise auf diese sonst leicht zu übersehende Stelle durch Herrn K. v. Goebel aufmerksam gemacht. Der berühmte Erforscher der Hinterindischen Inselwelt hatte sich verleiten lassen, im Januar 1870 mit einem Herrn John Hampden sich in eine Wette einzulassen, ob man auf der Erde selbst die Krümmung einer ausgedehnten Wasserfläche zu erkennen vermöge. Man einigte sich darüber, als Ort des Versuches den Bedford-Kanal in Norfolk zu wählen, über den zwei genau um 6 (engl.) Meilen absteheude Brücken führen. In der Mitte B zwischen beiden (A und C) wurde ein Pfahl so errichtet, daß die drei Punkte A, B, C, falls sie einer ganz ebenen Fläche angehören, genau in eine gerade Linie zu liegen kommen, die mit der Achse eines in A angebrachten und auf C gerichteten Fernrohres zusammenfällt; eine in B befindliche Signalplatte muß den anvisierten Punkt C verdecken. Ist aber die Linie, in deren Mitte sich der Pfahl aus dem Wasser erhebt, konvex gekrümmt, so geht die Visierlinie unterhalb an B vorüber, und da es sich nur um kleine Längenunterschiede handelt, so erblickt das bei A gedachte Auge im Gesichtsfelde zugleich die Signalscheibe B und den Punkt C. Eine dieses einfache Prinzip verdeutlichende Zeichnung wurde dem Gegner Hampden und seinen beiden Sekundanten vorgelegt, und alle drei räumten ein, daß sich gegen die Probe in dieser Form nichts einwenden lasse. Allein, als nun diese Probe vom Papier in die Wirklichkeit übertragen ward, wollten Hampden und seine Freunde das nicht sehen, was ihrer vorgefaßten Meinung zuwider war, und es kam zu einem häßlichen Streite zwischen beiden Parteien. Das englische Gesetz scheint damals festgesetzt zu haben, daß alle Wetten um Geld null und nichtig, die Einsätze aber nicht zurückzuverlangen seien. Das zog persönliche Beleidigungen nach sich, und deren Verfolgung erwies sich für Wallace nicht blos als recht ärgerlich, sondern auch als kostspielig. Es ist wohl wenig bekannt, daß noch in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts ein lange andauernder Prozeß um den Fundamentalsatz der Geographie hat geführt werden müssen.

Gedanken, die Größe eines Spiegelbildes mit derjenigen des gespiegelten Objektes zu vergleichen, konnte ein Zeitalter nicht wohl verfallen, welches noch eines Winkelmeßinstrumentes, wie es später der Spiegelsextant oder Spiegelkreis war[1]), entbehren mußte. Von der neuesten Phase, in welche das von Chiaramonti gestellte Problem eingetreten ist, soll im folgenden gehandelt werden, um zu erhärten, daß der Kern der Erörterungen, welche dieser seiner katoptrischen Methode gewidmet hatte, ein gesunder war. Es sind zwei waadtländische Forscher gewesen, die zuerst daran dachten, mit einem Spiegelinstrumente die Größe und Gestalt des von der ruhigen Fläche des Genfer Sees zurückgeworfenen Sonnenbildes zu bestimmen. Die Messungen von Dufour[2]) und Forel[3]) lassen keinen Zweifel darüber, daß die Beobachtung das theoretisch erschlossene Ergebnis sehr wohl zu bestätigen vermag. Es bedarf zu diesem Zwecke allerdings großer Aufmerksamkeit, weil nicht blos die Refraktion[4]), sondern auch die gerade am genannten See nicht ganz seltene Luftspiegelung[5]) eine Trübung des Sach-

[1]) Wie spät erst da und dort in der praktischen Nautik die Spiegelinstrumente sich die durchschlagende Wertschätzung zu erringen imstande waren, die uns heute als etwas ganz selbstverständliches erscheint, ist bei früherer Veranlassung hervorgehoben worden (Die indirekten Ortsbestimmungsmethoden in der Entwicklung der Mathematischen Geographie, Sitzungsber., 15. November 1919).

[2]) Ch. Dufour, De l'altération des images par réflexion sur la surface des eaux, Bulletin de la Société Vaudoise des sciences naturelles, 13. Band, S. 303 ff.

[3]) F. A. Forel, Image réfléchie sur la nappe sphéroidale des eaux du lac de Léman, Compt. Rend. de l'Acad. Franç., 107. Band, S. 605 ff.

[4]) Die atmosphärische Strahlenberechnung bewirkt, daß der untere Sonnenrand mehr als der obere gehoben wird, was eine Abflachung der Sonnenscheibe zur Folge hat. Im Spiegelbilde ist der obere Rand zum unteren geworden, und so kommt es, daß Refraktion des Originals und Reflexion für die vom Wasser gelieferte Kopie im gleichen Sinne wirken, daß sonach eine stärkere Eindrückung der unteren Hälfte sich ergibt.

[5]) Abweichende Dichteverhältnisse in der Atmosphäre können zum Auftreten der Erscheinung Anlaß geben, die man als Luftspiegelung („Mirage") kennt (vgl. Günther, Handbuch der Geophysik, 2. Band,

verhaltes zu bedingen geeignet scheint. Indem Dufour ferner annahm, man könne ermitteln, wie groß die Länge DE der zwischen zwei verlängerten Erdhalbmessern enthaltenen Geraden ist, welche die Wasserfläche in einem zwischenliegenden Punkte A berührt, während zugleich die Entfernungen KB und LC der beiden Licht aussendenden resp. empfangenden Punkte K und L vom Niveau bekannt sind, deren Lichtstrahlen eben die Spiegelung in A hervorrufen, gelangte er zu einer Berechnung des der spiegelnden Fläche entsprechenden Erdhalbmessers[1]); es ist dies eine Neugestaltung des von Ghetaldi hiefür vorgeschlagenen Verfahrens[2]). Es muß überhaupt, wenn man rechnerisch vorgehen will, nicht blos einseitig mit dem Sonnenbilde operiert werden; vielmehr läßt sich auch irgend ein anderes Objekt der Himmelskugel, z. B. ein Fixstern, verwenden. Groll z. B.[3]) bedient sich eines Fixsternes, der von einem um hm über der Wasserfläche gelegenen Punkte aus betrachtet wird. Versteht man unter β die gemessene Höhe jenes Sternes, unter α den Winkel, um den der gespiegelte Stern höher erblickt würde, wenn die betreffende Fläche ein

---

Stuttgart 1899, S. 118 ff.). Gerade auf dem Genfer See ist ein sehr merkwürdiger Fall zur Wahrnehmung gekommen, indem Original und Luftkopie einander nicht, wie gewöhnlich, vertikal, sondern vielmehr horizontal zugeordnet waren, so daß also die spiegelnde Fläche lotrecht auf der des Wassers stand. Im „Bulletin de la Société Philomathique" hat F. J. Soret beschrieben, was er zusammen mit L. Jurine gesehen hatte (Sur un phénomène du mirage latéral). Der Schatten der im Süden den See einschließenden Berge fiel so über diesen, daß eine südliche kühle, deutlich von einer nördlichen warmen Luftschicht sich abgrenzte.

[1]) Vgl. Günther, Handb. d. Geophysik, 1. Band, Stuttgart 1897, S. 118.

[2]) Näheres hierüber teilt mit E. Gelcich (Über den Vorschlag des Marino Ghetaldi, Die Größe der Erde zu bestimmen, Zeitschrift f. Mathematik und Physik, Histor.-Liter. Abteilung, 28. Band, S. 130 ff.). Tatsächlich in diesem Sinne vorzugehen, ist anscheinend und begreiflicherweise niemals versucht worden, wie denn auch Ghetaldis Anregung in einer für derartige Pläne sehr disponierten Zeit vereinzelt blieb.

[3]) J. Groll, Einfache Methode zur Bestimmung des Erdhalbmessers, Gaea, 1900, S. 696 ff.

Planspiegel wäre, so folgt der Erdradius aus nachstehender Formel:

$$\frac{h \cos(2\alpha + \beta)}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin\left(\frac{3\alpha}{2} + \beta\right)}.$$

Daß α meßbar ist, unterliegt keinem Zweifel, und es ist somit in der Tat ein von Forel gesprochenes Wort[1]) bekräftigt.

Anknüpfend an das Vorgehen der beiden Schweizer haben auch andere Gelehrte sich mit der Spiegelung im Wasser und mit deren Beziehungen zur Erdrundung beschäftigt. So hat insbesondere Wolf[2]) die hier auftretenden Verhältnisse rechnerisch geprüft. Er fand, daß in dem Augenblicke, in dem die Sonnenscheibe die spiegelnde Fläche berührt, der Durchmesser des Bildes 10 Bogenminuten betrage. Die Deformationen, welche letzteres erleidet, sind unter ausnehmend günstigen Umständen von Riccò in Catania untersucht worden[3]). Am besten gelang die Beobachtung, wenn das Auge sich 100 m über dem Meere befand, und die Tatsache, daß die Fläche des letzteren nicht eben, sondern gekrümmt ist, sprang überzeugend zumal dann in die Augen, wenn die Sonne im Auf- oder Untergehen begriffen war. Es zeigte sich nämlich dann sofort, daß die beiden Segmente, das direkt und das durch Reflexion sichtbare, nichts weniger als kongruent waren, was sie doch bei einem Planspiegel hätten sein müssen, sondern daß nach Größe und Gestalt die Abweichungen zwischen beiden solche waren, wie sie es eben unter der Voraussetzung eines Konvexspiegels sein mußten.

[1]) „Cette démonstration nouvelle de la rotondité de la Terre n'est donc pas seulement théorique; elle est appuyée sur l'observation directe du phénomène." Und Dufour drückt sich (a. a. O.) noch etwas plastischer aus: „On voit la Rondeur de la Terre, aussi bien que l'on voit celle d'une boule qu'on tient à la main."

[2]) C. Wolf, Sur la déformation des images des astres vus par réflexion à la surface de la mer, Compt. Rend., 107. Band, S. 650 ff.

[3]) A. Riccò, Image réflechie du Soleil à l'horizont marin, ebenda, 107. Band, S. 590 ff. Hiezu ist Archenholds Aufsatz (Himmel und Erde, 1. Jahrgang, S. 255 ff.) beizuziehen.

Was Chiaramonti in der ungelenken Denk- und Sprechweise seiner Zeit als eine Notwendigkeit bezeichnete und durch einen „Versuch mit untauglichen Mitteln“ erkennbar zu machen sich bemühte, war, wie wir jetzt wissen, kein Hirngespinnst, sondern eine richtige Einsicht, die freilich noch für lange nicht zur sinnenfälligen Erkenntnis gebracht werden konnte. Daß analoge Beobachtungen und Messungen noch häufiger sich wiederholen möchten, ist sehr zu wünschen, und der Wunsch darf um so eher auf Erfüllung rechnen, seitdem Dufour gezeigt hat, daß jene vollkommene Ruhe der reflektierenden Fläche, die allerdings eine Voraussetzung für das Gelingen ist, bei Binnenseen keineswegs so selten eintritt, wie man wohl zu vermuten geneigt sein möchte. Auffallen mag es, daß anscheinend nicht auch bereits die Mondscheibe verwertet ward, deren Größe doch von derjenigen der Sonnenscheibe nicht sehr verschieden ist. Das milde Licht des Vollmondes müßte, sollte man meinen, günstige Bedingungen liefern.

Sonnenatmosphäre und Einsteineffekt.

Von **R. Emden.**

Vorgetragen in der Sitzung am 3. Juli 1920.

Die Einsteinsche Relativitätstheorie folgert bekanntlich, daß ein Lichtstrahl, der die Sonne in nicht zu großer Entfernung passiert, durch das vorhandene Schwerefeld so gekrümmt wird, daß für den irdischen Beobachter der Winkel Sonnenmittelpunkt-Erde-Stern vergrößert erscheint. Diese Zunahme beträgt für einen Winkel gleich dem Sonnendurchmesser rund 1″, mit zunehmendem Winkel diesem proportional abnehmend. Eine Krümmung des Lichtstrahles in gleichem Sinne kommt auch durch Refraktion zu Stande, falls, was durch die Erscheinung der Korona wahrscheinlich ist, eine Sonnenatmosphäre mit abnehmender Dichte sich bis in diese Entfernungen erstreckt. Wird diese Winkelvergrößerung tatsächlich beobachtet, so bleibt vorerst unentschieden, wie diese Wirkung sich auf Einsteineffekt und Refraktion verteilt oder ob sie gar letzterer allein zuzuschreiben ist. Die folgenden Ausführungen sollen klar stellen, ob die Sonnenatmosphäre durch Refraktion in einer Höhe gleich einem Sonnenradius den sonst geradlinig verlaufenden Lichtstrahl um einen Betrag von 1″ abbiegen kann.

A) Die Sonnenatmosphäre sei aufgefaßt als konzentrisch geschichtetes Medium, dessen Dichte ϱ, und folglich auch dessen Brechungsexponent μ

1) $$\mu = 1 + \nu\varrho$$

für atmosphärische Luft $\mu = 1 + 0{,}0002927 \cdot \frac{\varrho}{\varrho_{\text{norm.}}}$

$= 1 + 0{,}2264\ \varrho$

für Wasserstoff $\mu = 1 + 0{,}0001387 \cdot \frac{\varrho}{\varrho_{\text{norm.}}}$

$= 1 + 1{,}546\ \varrho$

nach vorgeschriebenem Gesetze abnehmen. Durchsetzt der Strahl im Abstande r vom Kugelmittelpunkt den Radius im Winkel i, so gilt bekanntlich längs des ganzen Strahles die Beziehung $\mu r \sin i = \text{const} = \mu_0 r_0 \sin i_0$.

Daraus folgt

$$\operatorname{tg} i \frac{d\mu}{\mu} + \operatorname{tg} i \frac{dr}{r} + di = 0$$

und weiter, da die Polargleichung jeder Kurve $\frac{r\,d\varphi}{dr} = \operatorname{tg} i$ ergibt,

$$\operatorname{tg} i \frac{d\mu}{\mu} + d\varphi + di = 0.$$

Da aber (vgl. die Figur) $z = \varphi + i$, ergibt sich das bekannte Refraktionsintegral

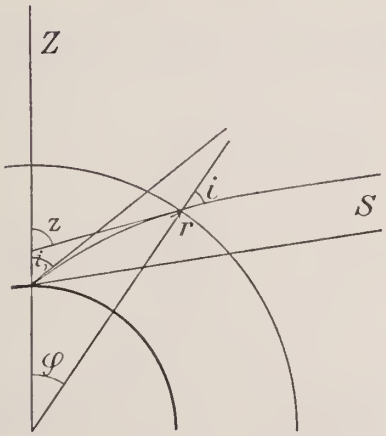
$$R = z_\infty - z_1 = -\int_{\mu_1}^{\mu_\infty = 1} \operatorname{tg} i \frac{d\mu}{\mu} = \int_1^{\mu_1} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\mu r}{\mu_1 r_1}\right)^2 \frac{1}{\sin^2 i_1} - 1}} \cdot \frac{d\mu}{\mu}$$

$$= \int_0^{\varrho_1} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1+r\varrho}{1+r\varrho_1}\right)^2 \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \frac{1}{\sin^2 i_1} - 1}} \cdot \frac{r\,d\varrho}{1+r\varrho}.$$

Um diesen Winkel hat sich der Strahl, welcher die Kugelschale $r = r_1$, $\mu = \mu_1$, $\varrho = \varrho_1$ in der Zenithdistanz i_1 verläßt, bis zum Durchsetzen der Kugelschale $r = \infty$, $\mu = 1$; $\varrho = 0$ gedreht. Da wir aber im Abstande r_1 bereits Gase in außerordentlicher Verdünnung anzunehmen haben, wie sich weiterhin ergeben wird, um viele Zehnerpotenzen kleiner als

Normaldichte, können wir unbedenklich $r\varrho$ gegen 1 vernachlässigen und erhalten schließlich das Refraktionsintegral in der Form

$$R = r \int_0^{\varrho_1} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \frac{1}{\sin i_1^2} - 1}} \cdot d\varrho.$$



B) Zur Auswertung des Integrals muß der Zusammenhang zwischen ϱ und r gegeben sein. Wir nehmen an, daß die Gase der Sonnenatmosphäre der Zustandsgleichung der vollkommenen Gase

$$\frac{p}{\varrho} = HT$$

gehorchen; die Atmosphäre selbst sei nach einer Polytropen[1]) von der Klasse n gebaut. (Bei konstantem Werte der Schwerebeschleunigung würde sich lineare Temperaturabnahme nach außen ergeben.) Jeder beliebige Temperaturverlauf kann durch polytrope Schichten von geeigneten n in vorgeschriebener Ge-

[1]) Über polytrope Atmosphären vgl. R. Emden, Gaskugeln, Kap. II, Leipzig 1907, oder R. Emden, Über polytrope Atmosphären. Meteorol. Zeitschr. 1916, S. 351.

nauigkeit dargestellt werden. Die Gleichung einer Polytropen in Parameterdarstellung lautet

$$T = u\,\Theta_n$$
$$\varrho = u^n$$
$$p = u^{n+1} H \Theta_n$$

und die Bedingung mechanischen Gleichgewichtes

$$dp = -\varrho\, d\Omega.$$

Vernachlässigen wir die innere Gravitation der Atmosphäre und bezeichnen mit g_1 die Schwerebeschleunigung im Radius r_1, so ist $d\Omega = \frac{g_1 r_1^2}{r^2} dr$ und weiterhin somit

$$du = -\frac{g_1 r_1^2}{(n+1) H \Theta_n} \frac{dr}{r^2},$$

$$u = \frac{g_1 r_1^2}{(n+1) H \Theta_n} \frac{1}{r} + c,$$

$$u_1 = \frac{g_1 r_1^2}{(n+1) H \Theta_n} \cdot \frac{1}{r_1} + c,$$

wodurch bei gegebenen u_1, n und Θ_n der Aufbau der Atmosphäre eindeutig bestimmt ist. Dadurch geht das Refraktionsintegral über in

$$R = \frac{n r \sin i_1}{u_1 - c} \int_0^{u_1} \frac{u^{n-1}(u-c)\,du}{\sqrt{1 - \left(\frac{u-c}{u_1-c}\right)^2 \sin^2 i_1}}$$

und durch Einführung der neuen Variabeln $z = \frac{u-c}{u_1-c}$ in

$$R = n r \sin i_1 (u_1 - c)^n \int_{-\frac{c}{u_1-c}}^{1} \frac{\left(z + \frac{c}{u_1-c}\right)^{n-1} z\,dz}{\sqrt{1 - \sin^2 i_1 z^2}}.$$

Führen wir noch ein die Höhe $\mathfrak{H}_n$ der im Abstande r_1 errichteten polytropen Atmosphäre von der Klasse n:

$$\mathfrak{H}_n = \frac{(n+1)\,H T_1}{g_1};$$

T_1 die Temperatur im Abstande r, so wird

$$u_1 = \frac{r_1}{\mathfrak{H}_n} u_1 + c; \quad \frac{c}{u_1 - c} = \left(1 - \frac{\mathfrak{H}_n}{r_1}\right),$$

$$R = n\,r\,\varrho_1 \left(\frac{r_1}{\mathfrak{H}_n}\right)^n \sin i_1 \int_{1-\frac{\mathfrak{H}_n}{r_1}}^{1} \frac{\left[z - \left(1 - \frac{\mathfrak{H}_n}{r_1}\right)\right]^{n-1} z\,dz}{\sqrt{1 - \sin^2 i_1\, z^2}}$$

und schließlich

$$R = n\,r\,\varrho_1 \frac{1}{(1-N)^n} \sin i_1 \int_N^1 \frac{(z-N)^{n-1} z\,dz}{\sqrt{1 - z^2 \sin^2 i_1}}; \quad N = 1 - \frac{\mathfrak{H}_n}{r_1}.$$

Durch die Polytropenklasse n und die Höhe $\mathfrak{H}_n$ der polytropen Atmosphäre im Abstande r_1 ist die Refraktion eindeutig bestimmt. Für den hier in Betracht kommenden Fall ist sie für den im Niveau r_1 horizontal streichenden Strahl $\sin i_1 = 1$ zu berechnen; diese werde mit R_{90} bezeichnet.

C) In erster Linie sind die beiden Parameter n und N geeignet anzusetzen. Nimmt man wie oben an, daß die Schwerebeschleunigung quadratisch mit der Entfernung abnimmt, so läßt sich leicht zeigen[1]), daß die polytrope Atmosphäre in einem Abstande $\mathfrak{R}$ vom Kugelmittelpunkte

$$\mathfrak{R} = \frac{r_1}{1 - \frac{\mathfrak{H}_n}{r_1}} = \frac{r_1}{N}$$

endigt. $\mathfrak{H}_n$ kann also nie größer werden wie r_1 (wodurch der obere Grenzwert der Temperatur im Abstande r_1 bestimmt ist), ohne daß die Atmosphäre sich zerstreut. Daraus folgt, daß N eingeschlossen ist zwischen den Grenzen

$$0 < N < 1; \quad N = \frac{r_1}{\mathfrak{R}}.$$

[1]) R. Emden, Gaskugeln, Kap. XVII, § 4. Leipzig 1907.

Auf den bei der letzten Sonnenfinsternis gewonnenen Aufnahmen zeigt sich noch im Abstande von 11 Sonnenradien eine meßbare Abbiegung der Strahlen. Eine durch Refraktion wirksame Gasmasse müßte sich also noch bedeutend weiter hinaus erstrecken. Lassen wir sie, um Anhaltspunkte für die weitere Rechnung zu erhalten, bei 14 resp. 20 Sonnenradien r_0 endigen, so ergibt sich, da $r_1 = 2r_0$, $N = \frac{1}{7}$ resp. $\frac{1}{10}$. Bei weiterer Ausdehnung würde N entsprechend abnehmen. Andererseits wird sich unten zeigen, daß n sehr groß, etwa von der Größenordnung 1000 anzusetzen ist. Dadurch wird die numerische Berechnung des Integrals schwierig. Doch läßt sich gerade für große n ein genügend genauer Näherungswert ermitteln. Es tragen dann nur die größten z-Werte wesentlich zum Integral bei, so daß sich mit hinreichender Genauigkeit ergibt

$$R_{90} = r\varrho_1 \frac{n}{\sqrt{2}\cdot(1-N)^n} \int_N^1 \frac{(z-N)^{n-1}\,dz}{\sqrt{1-z}}.$$

Setzen wir

$$1 - z = x^2, \quad 1 - N = b,$$

so wird

$$R_{90} = r\varrho_1 \frac{n\sqrt{2}}{b} \int_0^{\sqrt{b}} \left(1 - \frac{x^2}{b}\right) dx,$$

und für

$$\frac{x^2}{b} = \frac{\beta^2}{n-1},$$

$$R_{90} = r\varrho_1 \frac{n\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}\sqrt{b}} \int_0^{\sqrt{n-1}} \left(1 - \frac{\beta^2}{n-1}\right)^{n-1} d\beta.$$

Da aber für große n

$$\left(1 - \frac{\beta^2}{n-1}\right)^{n-1} = e^{-\beta^2},$$

wird

$$R_{90} = r\varrho_1 \frac{n\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}\sqrt{b}} \cdot \int_0^{\sqrt{n-1}} e^{-\beta^2} d\beta = r\varrho_1 \frac{n}{\sqrt{n-1}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{b}}$$

$$= r\varrho_1 \frac{n}{\sqrt{n-1}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{r_1}{\mathfrak{H}_n}} = r\varrho_1 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{g_1 r_1}{H T_1}}$$

und für $r_1 = 2$ Sonnenradien, $T_1 = 6000^0$ und eine Wasserstoffatmosphäre

$$R_{90} = 76{,}6 \cdot r\varrho_1 = \text{rund } 10^2 \cdot r\varrho_1.$$

ϱ_1 die Dichte im Abstande r_1 vom Sonnenmittelpunkte. Gemäß der gestellten Frage ist anzusetzen $r_1 = 2\,r_0$, r_0 der Radius der Photosphäre. Diese Dichte ist nun abzuschätzen.

D) Für die Temperatur im Abstande r vom Sonnenmittelpunkte ergibt sich wie oben für u

$$T = \frac{g_0 r_0^2}{(r+1)H} \frac{1}{r} + c.$$

g_0 die Schwerebeschleunigung an der Photosphäre. Die Konstante ist bestimmt durch $T = 0$ für $r = \mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}$ die Grenze der Atmosphäre. So ergibt sich

$$T = \frac{g_0 r_0^2}{(n+1)H} \cdot \frac{\mathfrak{R} - r}{\mathfrak{R} r}$$

und für die Temperatur der photosphärischen Schichten

$$T_0 = \frac{g_0 r_0}{(n+1)H}\left(1 - \frac{r_0}{\mathfrak{R}}\right)$$

und daraus

$$(n+1) = \frac{g_0 r_0}{H T_0}\left(1 - \frac{r_0}{\mathfrak{R}}\right).$$

Für Wasserstoff haben wir anzusetzen $H = 4{,}15 \cdot 10^7\,\text{cm}^2/\text{sec}^2$, ferner $g_0 = 2{,}67\ 10^4\ \text{cm/sec}^2$ und $r_0 = 6{,}96 \cdot 10^{10}$ cm. Die Temperatur der Photosphäre setzen wir erst gleich 6000^0, der effektiven Sonnentemperatur und lassen die Gasmasse endigen bei $\mathfrak{R} = 10\,r_0$ resp. $20\,r_0$. Dann ergibt sich

$$(n+1) = 6720 \text{ resp. } 7090$$

Aufbau als dissoziiertem Wasserstoffe würde diese Werte auf die Hälfte herabsetzen; sie nehmen ferner ab umgekehrt wie T_0. Für $T_0 = 60000^0$ würde $(n+1)$ immer noch von der Größenordnung 700 sein. Die oben ausgeführte Berechnung des Integrals für sehr große Werte von n ist damit gerechtfertigt.

Mit Hülfe dieser Werte von n können wir die zugehörigen Werte von ϱ_1 berechnen. Aus den Grundgleichungen der Polytropen folgt unmittelbar, wenn wir mit ϱ_0 die Dichte der Photosphäre bezeichnen

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^n$$

$$\varrho = \varrho_0 \left(\frac{1 - \frac{r}{\mathfrak{R}}}{1 - \frac{r_0}{\mathfrak{R}}}\right)^n \cdot \left(\frac{r_0}{r}\right)^n$$

und für den in Betracht kommenden Spezialfall

$$\varrho_1 = \varrho_0 \left(\frac{1 - \frac{2r_0}{\mathfrak{R}}}{1 - \frac{r_0}{\mathfrak{R}}}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Setzen wir n nur gleich 1000 (entsprechend einer Temperatur der Photosphäre von rund 36000), so folgt für ϱ_1 für $\mathfrak{R} = 10\, r_0$ resp. $20\, r_0$

$$\varrho_1 = \varrho_0\, 10^{-352} \text{ resp. } \varrho_0\, 10^{-325}$$

und für die Temperatur $T_0 = 6000^0$

$$\varrho_1 = \varrho_0\, 10^{-2365} \text{ resp. } 10^{-2304}.$$

Auch anderer Aufbau der Sonnenatmosphäre wie der angenommene, welcher den Temperaturverlauf $T = T_0 \dfrac{\mathfrak{R} - r}{\mathfrak{R} - r_0} \cdot \dfrac{r_0}{r}$ ansetzt, würde die Größenordnung der Dichte ϱ_1 nicht ändern. Lassen wir die Temperatur bis zum Werte 0 bei $\mathfrak{R} = 10\, r_0$ resp. $20\, r_0$ linear abnehmen, so ergibt eine leichte Rechnung für $T_0 = 6000^0$

$$\varrho_1 = \varrho_0\, 10^{-1690} \text{ resp. } \varrho_1 = \varrho_0\, 10^{-1650}.$$

Dabei nehmen die Exponenten nahezu proportional der Temperatur T_0 ab. Nehmen wir andererseits isothermen Aufbau der Gase an, so ergibt sich für $g = g_0 \frac{r_0^2}{r^2}$

$$\varrho = \varrho_0 \, e^{-\frac{g_0 r_0}{H T_0}\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)}$$

und daraus für $T_0 = 6000^0$

$$\varrho_1 = \varrho_0 \, 10^{-1620}.$$

Das Vorhandensein dieser ungeheuren Verdünnungen wird verständlich, wenn man beachtet, daß in der Erdatmosphäre für die konstante Temperatur $t = 0^0 \, c$ und $g = \text{const}$ für Wasserstoff die barometrische Höhenformel

$$h - h_0 = 266{,}5 \text{ km} \cdot \lg \frac{p_0}{p} = 266{,}5 \text{ km} \cdot \lg \frac{\varrho_0}{\varrho}$$

gilt, wonach die Dichte in 266,5 km Höhe auf $\varrho_0 \, 10^{-1}$ abgenommen hat. Da g_0 auf der Sonne 27,2 mal größer ist, ergibt sich auf ihr dieselbe Beziehung für eine Temperatur von $27{,}2 \cdot 273 = 7400^0$. In einer Höhe von 7000 km entsprechend einem Abstande von nur $^1/_{100}$ Sonnenradius würde also bereits eine Verdünnung auf $\varrho_0 \, 10^{-26}$ zu erwarten sein, die für $h = r_0$ auf $\varrho_0 \, 10^{-2620}$ steigen würde.

Da die mittlere Dichte der Sonne 1,4 g/cm³ beträgt, ist für ϱ_0 auf alle Fälle ein kleinerer Wert anzusetzen.

E) Für das Refraktionsintegral fanden wir oben

$$R_{90} = 10^4 \, r \, \varrho_1.$$

Um dem Strahle die Einsteinsche Durchbiegung von $1'' = 0{,}0000048$ zu geben, müssen wir $R_{90} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}0000048 = 2{,}4 \cdot 10^{-6}$ setzen. Für die Dichte ϱ_1 ergab sich nach den verschiedensten Annahmen die Größenordnung $\varrho_0 \, 10^{-1000}$, so daß die beiden Seiten der Gleichung überhaupt nicht vergleichbar sind. Die zu erwartende Refraktion ist praktisch gleich Null zu setzen. Daran würde bei gleichem ϱ_1 auch verschiedener Aufbau der Gasmassen nichts wesentlich ändern, wie die Behandlung des Refraktionsintegrals in der ungleich dichteren Erdatmosphäre

zeigt. In einem Abstande gleich dem Sonnenradius befinden sich die Gase eben in einem solchen Grade der Verdünnung, daß die Refraktionswirkung der weiter außen liegenden Massen unmerklich wird. Beobachtete Strahlabbiegung in diesem, geschweige denn in mehrfachem Abstande, wobei die Dichte exponentiell abnimmt, kann deshalb unmöglich normaler Refraktionswirkung einer konzentrisch geschichteten Sonnenatmosphäre zuzuschreiben sein. Daß man auch nach anderen Annahmen über den Bau der Atmosphäre zu so geringen Dichten geführt wird, habe ich an anderer Stelle[1]) nachgewiesen; sehr hohe Temperaturen sind dann noch immer möglich. Will man trotzdem das Leuchten der Korona nicht thermodynamisch erklären, so besteht die Möglichkeit, in ihr ein Seitenstück zu unseren Nordlichtern zu sehen; von der Sonne ausgeworfene α- oder β-Teilchen bringen die hochverdünnten Gasmassen zum Leuchten. Da die Erdentfernung 216 Sonnenradien beträgt, ist die Dichte dieses Teilchenstromes in der Korona mindestens $4{,}2 \cdot 10^4$ mal größer wie in Erdentfernung, so daß selbst in einer außerordentlich hoch verdünnten Gasmasse Leuchterscheinungen auftreten können.

Die vorstehenden Ausführungen berechtigen zu dem Schlusse: Wird bei Finsternissen eine Abstandsvergrößerung der Fixsterne von der Sonne im Betrage des Einsteineffektes festgestellt, so kann dieser weder ganz noch in einem meßbaren Bruchteile durch Refraktion einer normal geschichteten Sonnenatmosphäre verursacht sein.

[1]) R. Emden, Gaskugeln, Kap. XVIII Die Sonne.

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1920. Heft I
Januar- bis Märzsitzung

München 1920
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Inhalt.

Seite

Mitteilungen über die Klassensitzungen vom Januar, Februar u. März 1*

Abhandlungen.

M. Schmidt, Neuberechnung des südlichen Netzteiles der bayerischen Landestriangulierung zwischen der Donau und der Nordkette der Alpen 1

E. Stromer, Bemerkungen über die ältesten bekannten Wirbeltier-Reste 9

H. Liebmann, Bedingte Flächenverbiegungen, insbesondere Gleitverbiegungen 21

G. Faber, Über Potentialtheorie und konforme Abbildung . . 49

A. Kneser, Die elementare Theorie der analytischen Funktionen und die komplexe Integration 65

O. Hönigschmid und L. Birckenbach, Revision des Atomgewichtes des Wismuths. Analyse des Wismuthchlorids . 83

H. Seeliger, Untersuchungen über das Sternsystem . . . 87

A. Pringsheim, Elementare Funktionentheorie und komplexe Integration 145

L. Burmester, Über den optischen Ausgleich in der Zeitlupe . 183

Akademische Buchdruckerei F. Straub in München.

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1920. Heft II
Mai- bis Julisitzung

München 1920
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Inhalt.

Seite

Mitteilungen über die Klassensitzungen vom Mai, Juni und Juli 9*

Abhandlungen.

H. Liebmann, Ausnahmefachwerke und ihre Determinante . 197

A. Voss, Zur Theorie der reziproken Radien 229

A. Föppl, Die Beanspruchung eines Stabes von elliptischem Querschnitt auf Drillen bei behinderter Querschnittswölbung . 261

A. Pringsheim, Über eine Konvergenzbedingung für unendliche Reihen, die durch iterierte Mittelbildung reduzibel sind . 275

G. Pólya: Geometrisches über die Verteilung der Nullstellen gewisser ganzer transzendenter Funktionen 285

O. Perron: Über eine Verallgemeinerung des Stolzschen Irrationalitätssatzes II 291

M. Schmidt, Westwanderung von Hauptdreieckspunkten infolge neuzeitlicher tektonischer Bewegungen im bayerischen Alpenvorland 297

F. Broili, Ein neuer Placodontier aus dem Rhaet der bayerischen Alpen 311

A. Johnsen, Über die Paragenese von α-Quarz und Kohlensäure 321

H. Wieland: Über den Giftstoff der Kröte 329

E. Stromer, Mitteilungen über Wirbeltierreste aus dem Mittelpliocän des Natrontales (Ägypten) (mit 1 Tafel) . . . 345

S. Günther, Optische Beweise für die Erdkrümmung sonst und jetzt 371

R. Emden, Sonnenatmosphäre und Einsteineffekt . . . 387

Akademische Buchdruckerei F. Straub in München.

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1920. Heft III

Titel und Inhalt zum Jahrgang 1920.
Berichte über die Sitzungen mit Inhaltsangaben der Vorträge im November und Dezember 1920.
Verzeichnis der eingelaufenen Druckschriften.

München 1921
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Klasse
920 24-94733

1800

AMNH LIBRARY
100229663